Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXV Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2016 r.

Część III

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: KLUCZ

był tylko 1 zestaw

Czas egzaminu: 100 minut

Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa 5.12.2016 r.

Zadanie 1.
Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.2,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = 0.2,$$

i gęstością: $f(x) = 0.6$ na przedziale $(0, 1)$.
Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1)$ wynosi:

(A) 0.248

(B) 0.284

(C) 0.224

(D) 0.266

(E) 0.212

Zadanie 2.
Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,..., N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,... \quad \text{z parametrem } c = \frac{1}{3}e.$$

Właśnie pojawiło się roszczenie, i okazało się, że jest to pierwsze roszczenie z wypadku o którym dotąd nie wiedzieliśmy, a który miał miejsce miesiąc temu. Jednym słowem, wiadomo, że zaszedł wypadek, wiemy więc, że N wyniosło co najmniej 1, i że najmniejsza liczba ze zbioru $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, przyjęła wartość 1.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$E(N | \min\{T_1, T_2, ..., T_N\} = 1)$$

wynosi:

(A) e

(B) $e - 1/2$

(C) 2

(D) $(e+1)/2$

(E) 3/2

Zadanie 3.
Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma $(\alpha, 1)$, z wartością oczekiwaną równą wariancji, równą α;
- R będzie liczbą z przedziału $(0,1)$.

Wtedy:

$$\sup_{d>0} \mathrm{E}\{exp[R(Y-d)]|Y>d\}$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(B) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\frac{1}{1-R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(E) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 3$, $v = 2$ oraz $\theta = \frac{1}{5}$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej u. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u \to \infty} \Psi(u)(1 + au)^{b} = c$$

(A) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, 2, 5\right)$

(B) $(a,b,c) = (1, 2, 5)$

(C) $(a,b,c) = (2, 2, 5)$

(D) $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$

(E) $(a,b,c) = (2, 1, 5)$

Zadanie 5.

Liczba szkód, które generuje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).

Rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 9)$

Załóżmy, że w pierwszym roku zarówno nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę, a w portfelu naszej firmy, podobnie jak w portfelach innych firm, znaleźli się ubezpieczeni całkowicie przypadkowo wylosowani z populacji.

W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Informacja o tym, kto miał, a kto nie miał szkód, jest wszystkim ubezpieczycielom znana.

Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(A) ponad 45%

(B) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 40% a 45%

(C) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 36% a 40%

(D) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 33% a 36%

(E) mniej niż 33%

Zadanie 6.

Liczba szkód N, które zachodzą w ciągu roku z pewnego portfela ryzyk, ma rozkład o funkcji prawdopodobieństwa:

$\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} p^r q^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$

Z tej liczby N_0 to liczba tych szkód, o których zajściu dowiadujemy się przed końcem tego roku, i ma ona rozkład złożony:

$N_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_N,$

gdzie $M_1, M_2, M_3, \ldots$ to zmienne losowe o tym samym rozkładzie dwupunktowym: $\Pr(M_1 = 1) = Q, \quad \Pr(M_1 = 0) = 1 - Q,$ niezależne nawzajem i od zmiennej N.

Załóżmy, że parametry ww. rozkładów wynoszą:

$r = 3, \quad q = 100/101, \quad p = 1 - q, \quad Q = 3/4.$

Wtedy $cov(N_0, N - N_0)$ wynosi:

(A) 5925

(B) 5775

(C) 5625

(D) 5450

(E) 5250

Zadanie 7. Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka:

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona. Trzy niezależne podmioty pokrywają części S_1, S_2, oraz S_3 całkowitej wartości zmiennej S:

$$S_1 = min\{d, Y_1\} + min\{d, Y_2\} + \cdots + min\{d, Y_N\},$$
$$S_3 = max\{0, Y_1 - M\} + max\{0, Y_2 - M\} + \cdots + max\{0, Y_N - M\},$$
$$S_2 = S - S_1 - S_3,$$

gdzie parametry podziału odpowiedzialności spełniają warunki $M > d > 0$.
Jeśli przyjmiemy, że:

$$\mathrm{E}(N) = 20,$$
$$d = 2,$$
$$M = 10,$$

oraz iż dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody dana jest na półosi nieujemnej wzorem:

$$Pr(Y_1 \leq y) = 1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^3,$$

to $cov(S_1, S_3)$ wynosi:

(A) 10

(B) 15

(C) 25

(D) 40

(E) 50

Zadanie 8.
Rozważmy pewną populację ryzyk. Pojedyncze ryzyko z tej populacji generuje co najwyżej jedną szkodę w ciągu roku. Dane ryzyko, charakteryzujące się wartością q parametru ryzyka Q, generuje szkodę w każdym z kolejnych lat niezależnie, z prawdopodobieństwem q. Dla losowo wybranego ryzyka z tej populacji „jego q" jest realizacją zmiennej losowej Q.
Oznaczmy przez N_1 oraz N_2 odpowiednio liczbę szkód wygenerowaną przez pojedyncze, losowo wybrane z tej populacji ryzyko. Na podstawie obserwacji wielkiej liczby ryzyk z tej populacji, każde przez dwa kolejne lata ustalono, iż:

- $\Pr(N_1 + N_2 = 0) = \frac{2}{3}$,
- $\Pr(N_1 + N_2 = 1) = \frac{4}{15}$,
- $\Pr(N_1 + N_2 = 2) = \frac{1}{15}$.

Wobec tego wariancja parametru ryzyka w tej populacji:

- $var(Q)$

wynosi:

(A) $\frac{1}{15}$

(B) $\frac{1}{20}$

(C) $\frac{1}{25}$

(D) $\frac{3}{100}$

(E) $\frac{2}{75}$

Zadanie 9.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:
$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$,
- $E(Y_1) = 3$.

Wiemy też, że $c > 3\lambda$.
Przy tych założeniach warunkowy rozkład deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) nie jest dokładnie znany. Daje się jednak określić zbiór wszystkich możliwych wartości, jakie może przyjąć wartość oczekiwana tego rozkładu. Ten zbiór to przedział:

(A) $[1, \ 4]$

(B) $[3/2, \ 4]$

(C) $[2, \ 4]$

(D) $[3/2, \ 5]$

(E) $[2, \ 5]$

Zadanie 10.
Łączna wartość szkód $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ ma rozkład złożony.
Rozkład liczby szkód dany jest wzorem:
$\Pr(N = k) = (1 - q)q^k, \quad k = 0,1,2,\dots$
Rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest wzorem:
$\Pr(Y_1 = k) = (1 - Q)Q^k, \quad k = 0,1,2,\dots$
Parametry powyższych rozkładów wynoszą $q = 1/3$ oraz $Q = 2/3$.
Wobec tego wartość ilorazu $\frac{\Pr(X=k)}{\Pr(X=k-1)}$ dla dowolnego $k \in \{2,3,4,\dots.\}$ wynosi:

(A) 3/4

(B) 4/5

(C) 2/4

(D) 3/5

(E) Iloraz $\frac{\Pr(X=k)}{\Pr(X=k-1)}$ nie jest stały dla k ze zbioru $\{2,3,4,\dots.\}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2016 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ......KLUCZ ODPOWIEDZI......

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	E	
3	B	
4	A	
5	B	
6	C	
7	E	
8	E	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.