

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXV Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2016 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 5 grudnia 2016 r.

1. Ona (40) jest wybrana z populacji z wiekiem nieprzekraczalnym 121, przy czym rozkład trwania życia spełnia warunek

$$\dot{e}_x^{(k)} = \frac{121-x}{2,4} \text{ dla } x < 121.$$

Natomiast on (30) jest wybrany z populacji z wiekiem nieprzekraczalnym 98, przy czym rozkład trwania życia spełnia warunek

$$\dot{e}_x^{(m)} = \frac{98-x}{2,7} \text{ dla } x < 98.$$

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obydwoje przeżyją co najmniej 37 lat.

Zakładamy, że ich życia są niezależne.

Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,09    (B) 0,11    (C) 0,13    (D) 0,15    (E) 0,17

2. Na osobę w wieku  $(65\frac{3}{4})$  lat wystawiono 20-letnią rentę życiową, wypłacającą świadczenie raz w roku, poczynając od zaraz. Pierwsza wypłata wynosi 20 000 zł, a każda następna jest o 1 000 zł mniejsza. Oblicz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, przyjmując, że śmiertelność w każdym roczniku ma jednostajny rozkład. Dane są:

$$i=0,05 ; \quad p_{65} = 0,9727 ; \quad {}_{20}p_{65} = 0,28034 ; \quad \ddot{a}_{65:\overline{20}|} = 9,6725 ;$$

$$(D\ddot{a})_{65:\overline{20}|} = 131,872 .$$

Wskaż najbliższą wartość

- (A) 130 660      (B) 131 070      (C) 131 480      (D) 131 890  
(E) 132 300

3. Rozważamy bezterminowe ubezpieczenie na życie dla  $(x)$ , wylosowanego z populacji wykładniczej. Polisa wypłaci 1 w chwili śmierci, a opłacana jest za pomocą ciągłej renty życiowej składek ze stałą intensywnością netto. Niech  $L$  oznacza stratę ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy. Oblicz  $Var(L)$ , jeśli  $\frac{\delta}{\mu} = 1,769$ .

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 0,20                      (B) 0,22                      (C) 0,24                      (D) 0,26  
(E) 0,28

4. Rozpatrujemy dyskretny przypadek bezterminowego ubezpieczenia na życie.

Ubezpieczający ma do wyboru dwa warianty ubezpieczenia.

W pierwszym summa ubezpieczenia wynosi 200 000 zł i wymaga płacenia dożywotniej składki netto w stałej wysokości od momentu wystawienia polisy.

W drugim wariantcie summa ubezpieczenia wynosi 300 000 zł. W momencie wystawienia polisy ubezpieczający wpłaca jednorazową składkę netto  $A$ , a rok później rozpoczyna płacenie dożywotniej rocznej składki netto w stałej wysokości  $P$ . Składki  $A$  oraz  $P$  zostały wyznaczone tak, by wariancja straty ubezpieczyciela (na moment wystawienia polisy) była w wariantcie drugim o 50% wyższa od analogicznej wariancji w pierwszym ubezpieczeniu.

Oblicz składkę  $A$ , jeśli  $i=0,04$  oraz  $\ddot{a}_x = 12,5847$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 55 050      (B) 57 030      (C) 59 010      (D) 60 990  
(E) 62 980

5. Rozważamy ( $x$ ) wylosowanego z populacji wykładniczej z parametrem  $\mu = 0,0167$ , który za jednorazową składkę netto kupił ubezpieczenie na życie: wypłaci ono 1 w chwili jego śmierci. Techniczna stopa oprocentowania wynosi  $\delta = 0,025$ . Niech  $\rho = \rho(T)$  oznacza stopę zwrotu (w kategoriach rocznej intensywności stopy zwrotu) z tego ubezpieczenia, potraktowanego jako inwestycja jednorazowej składki. Oblicz prawdopodobieństwo:

$$\Pr(\rho \geq \delta).$$

Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,447      (B) 0,457      (C) 0,467      (D) 0,477  
(E) 0,487

6. Ubezpieczyciel podaje w OWU, że wartość gotówkową polisy wyznacza rezerwa składek netto pomniejszona o niezamortyzowane koszty początkowe, rozkładane metodą Zillmera na cały okres płacenia składek. Zastrzega również, że wypłacana wartość gotówkowa nie może być niższa od 96% rezerwy netto.

Rozważ dyskretny typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł oraz roczną składką płatną w stałej wysokości przez cały okres ubezpieczenia. Wyznacz maksymalną kwotę kosztów początkowych, taką, że ubezpieczyciel nie poniesie straty w przypadku, gdy ubezpieczający zrezygnuje po pierwszym roku z kontynuacji ubezpieczenia. Dane są:

$$D_x = 78\,715; \quad N_x = 1\,093\,450; \quad N_{x+2} = 940\,470; \quad N_{x+20} = 173\,480.$$

Wskaż najbliższą wartość w złotych.

- (A) 123                      (B) 127                      (C) 131                      (D) 135  
(E) 139

7. Rozważamy ubezpieczenie ciągle 40-letnie dla (23), które wypłaci świadczenie  $c(t)$  w chwili śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w wieku  $(23+t)$  dla  $t < 40$ .

Funkcja świadczenia śmiertelnego  $c(t)$  określona jest następująco:

$$c(t) \equiv 1 \text{ dla } t \leq 10; \text{ natomiast } c(t) = (40 - t)/30 \text{ dla } 10 \leq t < 40.$$

Składka jest płacona przez cały okres ubezpieczenia w formie renty życiowej ciągłej 40-letniej z odpowiednio dobraną roczną intensywnością netto  $\bar{P}$ .

Ubezpieczony wybrany jest z populacji wykładniczej z parametrem  $\mu = \frac{1}{70}$ , a

techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,03$ .

Oblicz  $V'(0)$  (chodzi o pochodną prawostronną rezerwy).

Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) -0,0062      (B) -0,0052      (C) -0,0042      (D) -0,0032  
(E) -0,0022



8. Ubezpieczeni pochodzą z populacji Gompertza, w której śmiertelność mężczyzn opisuje funkcja  $\mu_{x+t}^{(M)} = B \cdot c^{x+t}$ , gdzie  $B > 0$  oraz  $c = 1,02918$ , a śmiertelność kobiet funkcja  $\mu_{x+t}^{(F)} = 0,75 \cdot \mu_{x+t}^{(M)}$ .

Rozpatrujemy dyskretny typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie dla osoby w wieku 50 lat. Ubezpieczenie wypłaca świadczenie śmiertelne w wysokości 50 000 zł na koniec roku śmierci, a stała składka jest płacona na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Mężczyźni i kobiety płacą tę samą roczną składkę, a różnica w śmiertelności wyraża się w kwocie za dożycie, dobranej tak, by była ona jednakowa dla obydwu płci.

Podaj sumę ubezpieczenia za dożycie, znając liczby komutacyjne dla mężczyzn.

	x=40	x=45	x=50	x=55	x=60	x=65	x=70
$D_x$	20 755	12 545	7 475	4 350	2 450	1 320	665
$M_x$	2 155	1 745	1 370	1 020	715	470	285
$N_x$	204 585	118 790	67 175	36 650	19 080	9 330	4 185

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 174 050      (B) 175 550      (C) 177 050      (D) 178 550  
 (E) 180 050

9. Rozważamy emeryturę małżeńską dla niej ( $x$ ) i dla niego ( $y$ ). Składka będzie płacona w postaci renty życiowej ciągłej, nie dłużej niż 35 lat, przy czym póki żyją oboje, intensywność składki wynosi  $P$ , a po pierwszej śmierci  $2/3 P$ . Po 35 latach będzie wypłacana emerytura z intensywnością 1, gdy żyją oboje, a po pierwszej śmierci  $2/3$  owdowiałej osobie. Obliczyć intensywność netto składki  $P$ . Dane są

$$\bar{a}_{x:\overline{35}|} = 19,9772; \quad \bar{a}_{y:\overline{35}|} = 18,6789; \quad \bar{a}_{x:y:\overline{35}|} = 15,3821;$$

$$\bar{a}_x = 24,1043; \quad \bar{a}_y = 20,8831; \quad \bar{a}_{x:y} = 16,3325.$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,02$ .

Wybierz najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,19    (B) 0,21    (C) 0,23    (D) 0,25    (E) 0,27

---

**10.** Branżowy plan emerytalny obsługuje grupę pracowniczą, wylosowaną z populacji de Moivre'a z parametrem  $\omega = 95$ . Plan wypłaca w sposób ciągły dożywotnie emerytury od 65 roku życia. Na 1000 zł kapitału osoby przechodzącej na emeryturę wypłacane jest świadczenie z intensywnością roczną 100 zł, a następnie, po osiągnięciu 75 lat emeryci otrzymują niższe świadczenia, odpowiednio do aktuarialnego bilansu. Wyznacz intensywność wypłaty po 75 roku życia, przyjmując oprocentowanie  $\delta = 0,02$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 46    (B) 48    (C) 50    (D) 52    (E) 54

**LXXV Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2016 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	B	
2	A	
3	B	
4	E	
5	B	
6	B	
7	D	
8	D	
9	A	
10	C	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.