Zadanie 1

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,3,4,5$, gdzie a i b są nieznanymi parametrami rzeczywistymi, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = 5$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznanej wariancji $\sigma^2 > 0$.
Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie $\hat{b}$ i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej wiarogodności parametrów b i σ, a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

A) 0,633

(B) 1,027

(C) 0,529

(D) 0,776

(E) 0,796

Zadanie 2

Obserwujemy 9 niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \mathrm{K}, X_9$ o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & gdy\ \ x \in (0,1) \\ 0 & gdy\ x \notin (0,1) \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 1$ na poziomie istotności 0,05. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 2$ jest równa (zaznacz najlepsze przybliżenie)

(A) 0,70

(B) 0,30

(C) 0,97

(D) 0,41

(E) 0,59

Zadanie 3

W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy

6 kul oznaczonych X1
10 kul oznaczonych Y1
8 kul oznaczonych X2
6 kule oznaczone Y2.

Losujemy bez zwracania 12 kul. Niech N_{Y1} określa liczbę kul oznaczonych literą Y1 wśród kul wylosowanych, a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $Var\left(N_{Y1} \mid N_2 = 4\right)$.

(A) $\frac{23}{16}$

(B) $\frac{15}{8}$

(C) $\frac{11}{4}$

(D) 1

(E) $\frac{3}{2}$

Zadanie 4

Na podstawie próby losowej $X_1,\dots,X_{10}$, gdzie X_i, $i=1,\dots,10$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,\theta]$ i $\theta>0$ jest nieznanym parametrem, zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności 0,9 postaci

$[T_X, aT_X]$,

gdzie T_X jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ na podstawie próby $X_1,\dots,X_{10}$.

Następnie uzyskano niezależnie drugą próbę losową $Y_1,\dots,Y_{15}$ z tego samego rozkładu i zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności 0,9 postaci

$[T_{XY}, bT_{XY}]$,

gdzie T_{XY} jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ na podstawie próby $X_1,\dots,X_{10},Y_1,\dots,Y_{15}$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak utworzone przedziały będą rozłączne.

(A) 0

(B) 0,06

(C) 0,04

(D) 0,12

(E) 0,18

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}$, $m,n > 1$, będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ale dodatkowo znamy średnią $\overline{X}_{n+m} = \frac{1}{m+n}\sum_{i=1}^{n+m} X_i$. Budujemy estymator nieobciążony parametru σ^2 postaci $T = a\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$. Wtedy a jest równe

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{1}{m-1}$

(C) $\frac{n+m}{n(n+m-1)}$

(D) $\frac{n+m}{m(n+m-1)}$

(E) $\frac{n+m}{(m-1)(n+m-1)}$

Zadanie 6

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & \text{gdy} \quad y>0 \text{ i } x>0 \text{ i } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $V=\dfrac{X^2}{X^2+Y^2}$ i $Z=X^2+Y^2$. Wtedy

(A) $EV=1/3$

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v)=2v$ dla $v\in(0,1)$

(C) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v)=1$ dla $v\in(0,1)$

(D) $EZ=1/3$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem $h(z)=1$ dla $z\in(0,1)$

Zadanie 7

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2,...$ na przestrzeni stanów $\{0,1,2\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right)$ dla $i, j = 0,1,2$).

Niech $Z_1, Z_2,..., Z_n,...$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, X_2,..., X_n,...$, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\mathrm{P}(Z_i = 1) = \frac{3}{4} \text{ i } \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_i = Z_i \cdot X_i$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n > Y_{n+1})$ jest równy

A) $\frac{32}{144}$

(B) $\frac{57}{144}$

(C) $\frac{35}{144}$

(D) $\frac{26}{144}$

(E) $\frac{41}{144}$

Zadanie 8

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona o nieznanej wartości oczekiwanej λ.
Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N. Każda ze zmiennych X_i ma rozkład o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, X_2, ..., X_N$, które są większe od 5. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy sześć liczb i że suma ich kwadratów jest równa 300.
Na podstawie tych danych wyznacz wartości estymatorów największej wiarogodności parametrów θ i λ.

(A) $\hat{\theta} = 0{,}02$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0{,}2}$

(B) $\hat{\theta} = 0{,}02$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0{,}5}$

(C) $\hat{\theta} = 0{,}02$ i $\hat{\lambda} = 6e$

(D) $\hat{\theta} = 0{,}04$ i $\hat{\lambda} = 6e$

(E) $\hat{\theta} = 0{,}04$ i $\hat{\lambda} = 6e^{0{,}2}$

Zadanie 9

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(1+x)^4} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Wtedy $E(U \mid X_0 = 1)$ jest równa

(A) $\frac{1}{3n+2}\left(1 - \frac{1}{2^{3n+3}}\right)$

(B) $\frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1}{2^{3n}}\right)$

(C) $\frac{1}{3n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$

(D) $\frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1}{2^{3n+1}}\right)$

(E) $\frac{1}{3n+2}\left(1 - \frac{1}{2^{3n+2}}\right)$

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o funkcji gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
Rozważamy dwa estymatory funkcji $g(\theta) = P_\theta(X_1 > 2) = e^{-2\theta}$:

- $T_{1,n}$ - estymator największej wiarogodności w oparciu o próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- $T_{2,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i > 2)$, gdzie funkcja $\mathbf{1}(x > 2) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 2 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$.

Niech V_i oznacza wariancję asymptotyczną estymatora $T_{i,n}$, $i = 1,2$.

Wtedy stosunek $\frac{V_1}{V_2}$ jest równy

(A) $\dfrac{4\theta^2}{e^{2\theta} - 1}$

(B) $\dfrac{\theta^2 e^{2\theta}}{e^{2\theta} - 1}$

(C) $\dfrac{4}{\theta^2 (e^{2\theta} - 1)}$

(D) $\dfrac{\theta^2}{e^{2\theta} - 1}$

(E) $\dfrac{1}{\theta^2 e^{2\theta}}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 05 grudnia 2016 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	B	
5	C	
6	C	
7	E	
8	D	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.