

**Zadanie 1**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym  $\Lambda = \lambda$ . Zmienne  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ , mają warunkowe rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej  $\frac{1}{\lambda}$ , zmienne losowe  $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ , mają rozkłady dwupunktowe  $P(Y_i = 1) = 0,75 = 1 - P(Y_i = 0)$ . Rozkład brzegowy zmiennej  $\Lambda$  jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{8}{3} \lambda^3 e^{-2\lambda} & \text{gdy } \lambda > 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda \leq 0 \end{cases}.$$

Niech  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  i  $T = \sum_{i=1}^n Y_i X_i$ .

Oblicz współczynnik kowariancji  $Cov(S, T)$ .

- (A) 0
- (B)  $\frac{1}{2}n \left(1 + \frac{1}{3}n\right)$
- (C)  $\frac{1}{2}n$
- (D)  $\frac{1}{6}n^2$
- (E)  $\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n$

**Zadanie 2**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_6$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją  $\frac{1}{\theta}$ , gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr  $\theta$  ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru  $\frac{1}{\theta}$  postaci  $[a, b]$  taki, że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0,05,$$

gdzie  $\Pi(\cdot \mid x)$  oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa  $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ . Tak otrzymany przedział jest równy

$$(A) \left[ \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{26,296}, \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{7,962} \right]$$

$$(B) \left[ \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{18,307}, \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{3,940} \right]$$

$$(C) \left[ \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{23,685}, \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{6,571} \right]$$

$$(D) \left[ \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{15,507}, \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{2,733} \right]$$

$$(E) \left[ \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{11,071}, \frac{2 + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{1,146} \right]$$

**Zadanie 3**

Niech  $X_1, X_2, X_3, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0, 1)$ . Niech  $N$  będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 4, niezależną od zmiennych  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Niech

$$M = \begin{cases} \max\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\} & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wyznacz warunkową wartość oczekiwaną  $E(N/M=0,5)$ .

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 2,5

**Zadanie 4**

Zakładając, że obserwacje  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  stanowią próbkę losową z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem, wyznaczono wartość estymatora największej wiarygodności parametru  $\theta$  i otrzymano  $\hat{\theta} = 1,5$ . W próbce były dwie obserwacje o wartości 4, a pozostałe dziesięć obserwacji miało wartości mniejsze od 4. Okazało się, że w rzeczywistości zaobserwowane wartości były realizacjami zmiennych losowych  $X_i = \min\{Y_i, 4\}$ , gdzie  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$ , są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości  $f_{\theta}$ . Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarygodności parametru  $\theta$  po uwzględnieniu modyfikacji założeń.

- (A) 1
- (B)  $\frac{6}{5}$
- (C)  $\frac{5}{6}$
- (D)  $\frac{5}{4}$
- (E)  $\frac{4}{5}$

**Zadanie 5**

Niech  $X_1, X_2, K, X_5$ , będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta_1}(x) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{(1+x)^{\theta_1+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

a  $Y_1, Y_2, K, Y_4$  niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta_2}(x) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{(1+x)^{\theta_2+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie  $\theta_1, \theta_2$  są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne.

Niech  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  będą estymatorami największej wiarygodności parametrów  $\theta_1$  i  $\theta_2$  w oparciu o próby  $X_1, X_2, K, X_5$  i  $Y_1, Y_2, K, Y_4$  odpowiednio. Weryfikujemy hipotezę

$H_0 : \theta_1 = \theta_2$  przy alternatywie  $H_1 : \theta_1 > \theta_2$  testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > c \right\},$$

gdzie  $c$  jest stałą dobraną tak, by test miał rozmiar 0,05.

Wtedy  $c$  jest równe

- (A) 3,072
- (B) 3,347
- (C) 5,192
- (D) 6,256
- (E) 5,057

**Zadanie 6**

Niech  $(X, Y)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{gdy } 0 < y < 1 \text{ i } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech  $V = X + Y$  i  $Z = X - Y$ . Wtedy  $P(Z > 1 | V = 2)$  jest równe

(A)  $\frac{\sqrt{e}-1}{e^2-1}$

(B)  $\frac{e-\sqrt{e}}{e\sqrt{e}}$

(C)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(D)  $\sqrt{e} - 1$

(E)  $\frac{\sqrt{e}-1}{e-1}$

**Zadanie 7**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji  $\sigma^2$ . Rozważamy estymatory odchylenia standardowego  $\sigma$  postaci  $\hat{\sigma}_c = c \sum_{i=1}^n |X_i|$ . Niech  $\hat{\sigma}_{\bar{c}}$  oznacza estymator o najmniejszym błędzie średniokwadratowym w klasie rozważanych estymatorów. Wtedy  $\bar{c}$  jest równe

(A)  $\frac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi + n - 1}$

(B)  $\frac{1}{n-1}$

(C)  $\frac{1}{n}$

(D)  $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n - 2}$

(E)  $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n}$

**Zadanie 8**

Zakładamy, że zależność czynnika  $Y$  od czynnika  $x$  (nielosowego) opisuje model regresji liniowej  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ , gdzie błędy  $\varepsilon_i$  są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Obserwujemy zmienne losowe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  przy danych wartościach  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$$H_0 : \beta_0 = 0 \text{ i } \beta_1 = 1$$

przy alternatywie

$$H_1 : \beta_0 = -2 \text{ i } \beta_1 = 2$$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę  $H_0$ , gdy spełniona jest nierówność

$$(A) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (2 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(B) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (2 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(C) \quad \frac{\sum_{i=1}^n Y_i (x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (2 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(D) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (2 - x_i)^2}} > 1,645$$

$$(E) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (2 - x_i)^2}} > 1,645$$

**Zadanie 9**

Wykonujemy niezależnie rzuty symetryczną kostką do gry tak długo, aż uzyskamy sześć oczek w jednym rzucie. Oblicz prawdopodobieństwo, że wykonano siedem rzutów, jeśli wiadomo, że dwa razy wypadły trzy oczka.

(A)  $\frac{80}{729}$

(B)  $\frac{160}{729}$

(C)  $\frac{80}{243}$

(D)  $\frac{10}{729}$

(E)  $\frac{10}{243}$

**Zadanie 10**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu ciągłego, symetrycznego, o ściśle rosnącej dystrybucji o medianie  $m$ .

Wtedy  $P(X_{3:10} < m < X_{7:10})$  jest równe

(A)  $\frac{111}{128}$

(B)  $\frac{95}{128}$

(C)  $\frac{84}{128}$

(D)  $\frac{114}{128}$

(E)  $\frac{99}{128}$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 12 czerwca 2017 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	C	
4	D	
5	A	
6	E	
7	D	
8	A	
9	A	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.e