

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Wektor losowy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } \{(x, y) : (x, y) \in (0, 1)^2, y > x\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że $\left[\frac{Y}{X}\right]$ jest liczbą parzystą? Przez $[z]$ oznaczamy liczbę całkowitą najbliższą liczbie z (przyjmujemy $[n + 1/2] = n$ dla liczby całkowitej n).

- (A) $\frac{\pi}{2} - 1$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $1 - e^{-4}$
- (D) $2 - \frac{\pi}{2}$
- (E) $1 - e^{-1}$

Zadanie 2.

Niech $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0,1)$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ oraz $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ile wynosi $Cov(S_n, Z_n)$?

- (A) $\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$
- (B) $\frac{3}{2(n+1)(n+2)^2}$
- (C) $\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$
- (D) $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$
- (E) $\frac{1}{2n(n+1)(n+2)}$

Zadanie 3.

Założmy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 > 0$, a zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_2 > 0$ oraz, że X i Y są niezależne.

Ile wynosi $\text{Var}(X|X+Y=n)$ dla $n \geq 1$?

(A) $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} n$

(B) $\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n$

(C) $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} n$

(D) $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} n$

(E) $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} n$

Zadanie 4.

Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie średnia μ i wariancja σ^2 nie są znane. Oznaczmy $\hat{X}_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$. Wiemy, ile wynosi \hat{X}_{2n} , ale mamy dostęp tylko do obserwacji X_1, \dots, X_n . Statystyka

$$S^2 = \frac{1}{n - \rho} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_{2n})^2$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2 . Ile wynosi ρ ?

(A) Nie istnieje takie ρ

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{n}{2} + 1$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) 1

Zadanie 5.

Niech (X, Y) będzie wektorem losowym o dystrybuancie

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 + \alpha e^{-x}e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\alpha \geq 0$. Ile wynosi $E(\min(X, Y))$?

- (A) $\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\alpha + 1}{2}$
- (C) $\frac{1}{6}e^{-\alpha} + \frac{1}{2}$
- (D) $\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}$
- (E) $\frac{1}{2}e^{-\alpha}$

Zadanie 6.

Wektor (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(\mu, \Sigma)$ ze średnią $\mu = (0, 1)$ i z macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ile wynosi $Cov(X^2, Y)$?

(A) 3

(B) $\frac{3}{4}$

(C) 0

(D) 4

(E) 6

Zadanie 7.

Niech $S_n := \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$, $n \geq 6$. Dla $\{a_1, \dots, a_m\} = S \subseteq S_n$ (oczywiście $1 \leq m \leq$

$n - 1$) niech $P(S)$ oznacza iloczyn wszystkich elementów z S , tzn. $P(S) = \prod_{i=1}^m a_i$.

Zdefiniujmy

$$T_{parz} = \sum_{\substack{S \subseteq S_n: \\ |S| \text{ jest parzyste}}} P(S),$$

tzn. T_{parz} jest sumą wszystkich takich iloczynów dla wszystkich podzbiorów S o parzystej liczbie elementów. Ile wynosi T_{parz} ?

(A) $\frac{31n^2 - 72n + 17}{120(n+1)}$

(B) $\frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 1}{n+1}$

(C) $\frac{n^2 + n + 2}{4n}$

(D) $\frac{n^4 - 10n^3 + 36n^2 - 53n + 26}{4n}$

(E) $\frac{n^2 - 3n + 2}{4n}$

Zadanie 8.

Założmy, że chcemy wyestymować $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ poprzez symulacje, dwoma metodami. Ustalmy parzyste $n \geq 2$.

- Metoda 1. Symulujemy niezależne zmienne losowe U_1, U_2, \dots, U_n o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$. Niech $Y_i = \frac{1}{1+U_i}, i = 1, \dots, n$. Estymator

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- Metoda 2. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_1, U_2, \dots, U_{\frac{n}{2}}$ o rozkładzie jednostajnym $U(0, 1)$. Niech $Y_{2i-1} = \frac{1}{1+U_i}, Y_{2i} = \frac{1}{2-U_i}, i = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Estymator

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

W obu przypadkach mamy $E\hat{Y}_1 = E\hat{Y}_2 = \ln(2)$. Ile wynosi $\frac{\text{Var}(\hat{Y}_2)}{\text{Var}(\hat{Y}_1)}$?

(A) $\frac{3 - 12(\ln 2)^2 + 4 \ln 2}{3(1 - 2(\ln 2)^2)}$

(B) $\frac{1 - \ln 2}{4(1 - (\ln 2)^2)^2}$

(C) $\frac{(\ln 2)^2 - 1}{2(\ln 2)^2 - 1}$

(D) $\frac{4 \ln 2 - 3}{8((\ln 2)^2 - 1)}$

(E) $\frac{1 - e^2 + 4 \ln 2}{1 - 2e^2}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, \dots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq c, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie parametr $c > 0$ jest znany, a parametr $\alpha > 0$ nie jest znany. Niech $\hat{\alpha}_n$ oznacza estymator parametru α otrzymany metodą największej wiarygodności.

Ile wynosi $\text{Var}(\hat{\alpha})$?

(A) $\frac{\alpha^2}{n}$

(B) $\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2$

(C) $\frac{\alpha^2}{n^2-1}$

(D) $\frac{n^2}{(n-1)(n-2)^2}\alpha^2$

(E) $\frac{\alpha^2}{n+1}$

Zadanie 10.

Wysokość szkód X dla nieznanymi parametrów $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$ ma następujący rozkład

$$Pr(X = x | \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & x = 0, \\ (1 - \alpha)\beta(1 - \beta)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Zaobserwowano X_1, X_2, \dots, X_n z czego wiadomo, iż k razy zaobserwowano 0 (tzn. $X_i = 0$ dla $i \in A \subset \{1, \dots, n\}, |A| = k$).

Założmy, że α i β są niezależne oraz, że α ma rozkład a priori $Beta(a_1, a_2)$, $a_1, a_2 \in (0, 1)$, natomiast β ma rozkład a priori $Beta(b_1, b_2)$, $b_1, b_2 \in (0, 1)$. Zmienna o rozkładzie $Beta(v, w)$ ma gęstość:

$$f(x) = \frac{x^{v-1}(1-x)^{w-1}}{B(v, w)}, x \in (0, 1), v \in (0, 1), w \in (0, 1),$$

gdzie $B(v, w) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(v+w)}$, a $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$.

Jaki rozkład a posteriori ma β ?

- (A) $Beta\left(\sum_{i=1}^n X_i - k + b_1, (n - k) + b_2\right)$
- (B) $Beta(n - k + b_1, n - k + b_2)$
- (C) $Beta(k + b_1, n - k + b_2)$
- (D) $Beta(k + a_1, n - k + a_2)$
- (E) $Beta(n - k + b_1, \sum_{i=1}^n X_i - (n - k) + b_2)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	D	
2	A	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	E	
8	A	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.