

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXIX Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Portfel  $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$  replikujący następującą wypłatę dla dwumiesięcznej opcji kupna akcji spółki Z:

$$C_T(\omega) = \begin{cases} C^u, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{gdy } \omega = \omega_2, \end{cases}$$

wymaga zaciągnięcia kredytu w wysokości 80,79 j.p. Cenę wykonania opcji ustalono na poziomie aktualnej ceny akcji, tj. dla  $t=0$ .

W czasie trwania opcji możliwe są dwa scenariusze wydarzeń: cena akcji w chwili T może wynieść  $S_T = \{130, \text{gdy } \omega = \omega_1\}$  lub  $S_T = \{102, \text{gdy } \omega = \omega_2\}$ .

Jaki będzie koszt replikacji opcji? Zakłada się, że stopa procentowa na 2-miesięczny depozyt wynosi 1%.

- (A) 0,35
- (B) 5,29
- (C) 10,32
- (D) 22,40
- (E) 27,72

**Zadanie 2.**

Cenę obligacji zerokuponowej z terminem wykupu  $\tau$  opisuje formuła:

$$Z_s^t = (1 + r_{s+1})^{-1} E_Q [Z_{s+1}^t | \mathcal{F}_s], \text{ gdzie } t = s + 1.$$

Przyjmując  $T=3$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ ,  $Q(\omega_1) = \dots = Q(\omega_6) = \frac{1}{6}$  oraz dane jest:

i.  $r_1 = 0,04$

ii. 
$$r_2(\omega) = \begin{cases} 0,07 & \text{dla } \omega = \omega_1, \omega_2 \\ 0,05 & \text{dla } \omega = \omega_3, \omega_4 \\ 0,04 & \text{dla } \omega = \omega_5, \omega_6 \end{cases}$$

iii. 
$$r_3(\omega) = \begin{cases} 0,09 & \text{dla } \omega = \omega_1 \\ 0,08 & \text{dla } \omega = \omega_2 \\ 0,06 & \text{dla } \omega = \omega_3 \\ 0,06 & \text{dla } \omega = \omega_4 \\ 0,05 & \text{dla } \omega = \omega_5 \\ 0,03 & \text{dla } \omega = \omega_6 \end{cases}$$

Wyznacz cenę obligacji  $Z_0^3$ . Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,8604

(B) 0,8986

(C) 0,9247

(D) 0,9524

(E) 0,9709

**Zadanie 3.**

Na rynku dostępna jest opcja sprzedaży na akcji spółki Y z ceną wykonania 60 j.p. i terminem do wygaśnięcia równym 105 dni. Aktualny kurs akcji wynosi 62 j.p., wolna od ryzyka stopa procentowa 8% w skali roku a dzienna zmienność 1%.

Przyjmując, że cena opcji opisana jest za pomocą formuły Blacka-Scholesa, podaj przy jakim spadku ceny akcji dla nabywcy opcji sprzedaży zostanie osiągnięty próg rentowności. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 0,49 j.p
- (B) 1,29 j.p.
- (C) 2,16 j.p
- (D) 3,29 j.p
- (E) żadna z powyższych

$$d_{1/2} = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

**Zadanie 4.**

Wartość kapitału początkowego  $P$  jest zmienną losową o rozkładzie:

$$\Lambda(\ln F - \sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2).$$

Miesięczne stopy przy dyskontowaniu ciągłym  $i_1, i_2, i_3, i_4$  są niezależnymi zmiennymi losowymi  $X$  o rozkładzie  $N(\mu; \sigma^2)$ , dla których dane jest:

$$X_1: N(0,06; 0,03^2)$$

$$X_2: N(0,04; 0,02^2)$$

$$X_3: N(0,07; 0,04^2)$$

$$X_4: N(0,05; 0,02^2).$$

Wiedząc, że  $\Lambda(11,8807; 0,05745^2)$ , wyznacz wartość oczekiwaną kapitału początkowego zmiennej losowej  $P$ , która umożliwi inwestorowi osiągnięcie za 4 miesiące kapitału  $F$ .

(A) 143 975,73

(B) 144 213,48

(C) 144 451,63

(D) 144 690,17

(E) 144 929,11

**Zadanie 5.**

Inwestor zakupił akcje spółki Z po kursie 15 PLN. W chwili  $T$  w przyszłości możliwych jest pięć zdarzeń  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ , dla których przyjęto symetryczny rozkład prawdopodobieństwa jednookresowych stóp zwrotu z inwestycji w akcje spółki Z.

Prawdopodobieństwo ogłoszenia przez spółkę upadłości określono na 1%. W przypadku osiągnięcia na rynku kursu akcji 60 PLN inwestor osiągnąłby najwyższą stopę zwrotu, natomiast dla kursu 37,5 PLN – połowę niższą. Prawdopodobieństwo uzyskania oczekiwanej stopy zwrotu równej 1 wynosi 60%.

Ile wynosi przeciętne odchylenie możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 17,50%
- (B) 28,28%
- (C) 34,14%
- (D) 41,83%
- (E) 47,15%

**Zadanie 6.**

Rozpatrywany jest rynek jednookresowy, na którym możliwe są trzy zdarzenia losowe  $\omega_i$  ( $i=1,2,3$ ) odnoszące się do kształtowania się kursu akcji. Prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych zdarzeń wynosi odpowiednio  $p_i$ . Wiadomo, że:

- i. proces cen akcji ma postać:

$$S_0 = 15$$

$$S_1(\omega_1) = 10$$

$$S_1(\omega_2) = 35$$

$$S_1(\omega_3) = 20$$

- ii. stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi 10%.

Jaki powinien być przedział  $p$ , aby można było mówić o rynku bez możliwości arbitrażu. Podaj właściwą odpowiedź.

- (A)  $p \in (0; 0,74)$   
(B)  $p \in (0; 0,65)$   
(C)  $p \in (0; 0,46)$   
(D)  $p \in (0; 0,33)$   
(E) żadna z powyższych

**Zadanie 7.**

Firma posiada portfel akcji o wartości 405 tys. zł, dla którego wiadomo, że w przypadku wzrostu stopy zwrotu z portfela rynkowego o 1% nastąpi wzrost stopy zwrotu z portfela akcji o 1,1%. Sprzedaż powyższych aktywów finansowych przewidywana jest za dwa miesiące.

W celu zminimalizowania ryzyka posiadanego portfela akcji firma zajmuje krótką pozycję na rynku terminowym, która obejmuje 10 szt. trzymiesięcznych kontraktów futures na indeks WIG20. Wartość mnożnika dla kontraktów na indeks WIG20 wynosi 20 zł. Bieżąca wartość indeksu WIG20 jest na poziomie 2210 pkt. a stopa dywidendy dla wszystkich akcji wchodzących w skład indeksu wynosi  $d$  i przez czas trwania strategii zabezpieczającej pozostaje na niezmiennym poziomie.

Zakładając, że wolna od ryzyka stopa procentowa kapitalizowana w sposób ciągły jest stała i wynosi 5%, wyznacz wartość  $d$ . Podaj najbliższy wynik.

- (A) 0,50%
- (B) 1,10%
- (C) 1,84%
- (D) 2,01%
- (E) 2,76%



**Zadanie 8.**

Pożyczka w kwocie 350 000 jest spłacana 30 ratami płatnymi na końcu każdego roku, w następujący sposób:

- pierwszych 20 rat ma stałą wartość  $R$ ,
- raty w trzecim dziesięcioleciu są jednakowej wysokości.

Wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek, które będą zapłacone w pierwszych 10 ratach jest taka sama, jak sumaryczna kwota odsetek, które zostaną zapłacone w ostatnich 10 ratach.

Oblicz ile wynosi  $R$ , jeżeli stopa procentowa jest równa 9%.

Podaj najbliższą wartość.

(A) 26 350

(B) 26 360

(C) 26 370

(D) 26 380

(E) 26 390

**Zadanie 9.**

Zgodnie z umową kredyt w wysokości 400 000 ma być spłacany w okresie 30 lat równymi ratami płatnymi na koniec każdego roku, przy czym przez pierwsze 15 lat oprocentowanie wynosi 8%, a w okresie ostatnich 15 lat oprocentowanie jest równe 6%.

Bezpośrednio po zapłaceniu 20 raty kredytobiorca dokonał spłaty 20% aktualnego zadłużenia i uzgodnił z bankiem, że spłaci pozostałą część zadłużenia w ciągu 10 lat ratami płatnymi na koniec każdego roku o stałej wartości, przy oprocentowaniu 7%.

Oblicz ile wynosi suma odsetek jakie zapłacił kredytobiorca w 10 i 25 racie spłaty kredytu. Podaj najbliższą wartość.

- (A) 39 110
- (B) 39 210
- (C) 39 310
- (D) 39 410
- (E) 39 510

**Zadanie 10.**

Ubezpieczony na życie i dożycie, któremu po dożyciu do końca okresu ubezpieczenia należy się świadczenie jednorazowe w wysokości 300 000, wybiera opcję wypłaty świadczenia w formie 25 letniej renty pewnej, płatnej na końcu każdego roku, na co przeznaczają całą powyższą kwotę.

Zakład ubezpieczeń do kalkulacji raty renty oraz obliczania wysokości rezerw technicznych (rezerwa techniczna to aktualna wartość renty) stosuje techniczną stopę procentową w wysokości 2,5%.

Zakład ubezpieczeń dzieli się z ubezpieczonym zyskiem uzyskanym przy lokowaniu aktywów stanowiących pokrycie rezerw technicznych. Oznacza to, że przy każdej płatności raty renty zakład wypłaci ubezpieczonemu 90% zysku osiągniętego ponad stopę techniczną w ostatnim roku (liczonego od kwoty rezerwy technicznej na początku roku).

Przewiduje się, że stopy zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw technicznych będą następujące:

- 2,4% w latach 1 - 5,
- 3,2% w latach 6 - 10,
- $i$  w latach 11 - 15,
- 3,0% w latach 16 – 20
- $j$  w latach 21 – 25,

Oblicz, ile jest równa suma  $i + j$  wiedząc, że:

- suma wypłat z zysku w latach 1 - 15 wyniesie 8 960,87,

- suma wypłat z zysku w ostatnich 5 latach będzie mniejsza od sumy wypłat z zysku w latach 16 – 20 o 958,67.

Podaj najbliższą wartość.

- (A) 6,0%
- (B) 6,2%
- (C) 6,4%
- (D) 6,6%
- (E) 6,8%

Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$ 

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	D	
4	D	
5	D	
6	B	
7	C	
8	D	
9	B	
10	A	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.