Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXIX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Niech N będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na $\{0,\ldots,19\}$. Podaj ile wynosi wartość oczekiwana EX, gdzie

$$X = \sum_{k=0}^{N} \binom{N-k}{k} (-1)^k.$$

(Tradycyjnie przyjmujemy $0! = 1$ oraz $\binom{m}{n} = 0$ dla $m < n$).

(A) 1

(B) $\frac{1}{20}$

(C) $-\frac{1}{20}$

(D) $\frac{1}{10}$

(E) 0

Zadanie 2.

Rzucamy niezależnie symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł otrzymujemy 1 punkt, jeśli reszka 2 punkty. Początkowo mamy 0 punktów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w którymś momencie uzyskamy dokładnie n punktów (dla $n \geq 9$)?

(A) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(D) $1 - \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

(E) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Zadanie 3.

Niech $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{0,1,2\}$ z macierzą przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Rozkład początkowy jest jednostajny $Pr(X_0 = k) = \frac{1}{3}$ dla $k \in \{0,1,2\}$.
Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0, \\ Z_k &= (X_k - X_{k-1}) \bmod 3, \qquad \text{dla } k \geq 3, \end{aligned}$$

(przyjmujemy typowo: $(-1) \bmod 3 = 2$ oraz $(-2) \bmod 3 = 1$).

Ile wynosi EZ_n?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(C) $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(D) $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 4.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(0, \theta)$, $\theta > 0$. Zdefiniujmy $T = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Znajdź wartość $\alpha > 0$, które minimaluzuje błąd średniokwadratory MSE estymatora αT parametru θ.

(Dla estymatora $\hat{\theta}$ parametru θ MSE definiujemy następująco: $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$).

(A) $\dfrac{n+2}{n+1}$

(B) $\dfrac{n+1}{n+2}$

(C) 1

(D) $\dfrac{1}{2}$

(E) $\dfrac{n+1}{n}$

Zadanie 5.

Mamy ciąg zmiennych losowych $X_1,\ldots,X_n, n \geq 4$ takich, że $EX_i = \sqrt{i}, VarX_i = 1, i = 1,\ldots,n$ oraz $Cov(X_i,X_j) = \rho$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $I_1,\ldots,I_n$ są wzajemnie niezależne, a także są niezależne od ciągu $X_1,\ldots,X_n$, mają rozkład $P(I_i = 0) = P(I_i = 1) = 0.5$.

Oblicz $Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{n}(5+n+2\rho(n-1))}{2}$

(B) $\dfrac{n(5+n+2\rho(n-1))}{8}$

(C) $\dfrac{n(1+n+2\rho(n+1))}{4}$

(D) $\dfrac{n(5+n+2\rho\sqrt{n}))}{4}$

(E) $\dfrac{n(6n-7+2\rho)+4-2\rho}{4}$

Zadanie 6.

Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o łącznej gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Zdefiniujmy zmienną losową $T = \dfrac{X}{X+Y}$. Ile wynosi $VarT$?

(A) 1

(B) $\dfrac{1}{6}$

(C) $\dfrac{2}{3}$

(D) $\dfrac{4}{9}$

(E) $\dfrac{1}{18}$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U(0,1)$. Ustalmy $p \in (0,1)$ oraz zdefiniujmy

$$N = \inf\{n \geq 1 : X_n > 1-p\}, \qquad Y = \max_{0 \leq i \leq N-1} X_i,$$

gdzie $X_0 \equiv 0$. Ile wynosi EY ?

(A) $1 + \frac{p}{1-p}\ln(p)$

(B) $1 - \ln(p+1)$

(C) $1 - p + p\ln(p)$

(D) $1 + \frac{p^2}{1-p}\ln(p)$

(E) $1 - p + p^2\ln(p)$

Zadanie 8.

Wektor (X,Y,Z) ma trójwymiarowy rozkład normalny $N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ ze średnią $\boldsymbol{\mu} = (\mu, 4\mu, 3\mu)$, gdzie parametr $\mu \neq 0$ nie jest znany, a macierz kowariancji jest następująca:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interesują nas estymatory nieznanego parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = aX + bY + cZ, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Rozpatrujemy tylko estymatory *nieobciążone*. Ile wynosi najmniejsza wariancja takiego estymatora?

(A) $\dfrac{7}{64}$

(B) 1

(C) $\dfrac{5}{32}$

(D) $\dfrac{17}{128}$

(E) żadne z powyższych

Zadanie 9.

Szkody $X_1, \ldots, X_n, n \geq 3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze *znaną* średnią μ_0 i nieznaną wariancją σ^2. Oznaczmy $\xi = \frac{1}{\sigma^2}$. Załóżmy, że rozkład *a priori* parametru ξ to rozkład $\Gamma(a, b)$ (tj. rozkład gamma) ze znanymi parametrami a oraz b. Wtedy rozkład *a posteriori* ξ pod warunkiem $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ ma również rozkład gamma z parametrami a_1, b_1, tj. $\Gamma(a_1, b_1)$. Ile wynosi parametr a_1 ?

Zmienna o rozkładzie $\Gamma(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$ ma gęstość

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0,$$

gdzie

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

(A) $a + \frac{n}{2}$

(B) $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 + b$

(C) $\frac{na}{4}$

(D) $\frac{a + n^2}{2}$

(E) $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 - b$

Zadanie 10.

Rozkład Gumbela z parametrem μ (i parametrem skali równym 1) – który oznaczamy przez Gumbel(μ) – ma następującą gęstość i dystrybuantę:

$$f_G(t) = e^{-t+\mu}e^{-e^{-t+\mu}}, \qquad F_G(t) = e^{-e^{-t+\mu}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ustalmy $n \geq 3$. Niech π będzie rozkładem n-punktowym na zbiorze $\{x_1, \ldots, x_n\}$ wyrażający się wzorem:

$$\pi(x_k) = \frac{1}{C} exp\,(x_k)\,, i = 1, \ldots, n, \quad \text{gdzie } C = \sum_{j=1}^{n} exp(x_j).$$

Niech $Z_1, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gumbel(0). Zdefiniujmy zmienne losowe

$$Y_i = x_i + Z_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

oraz

$$Y = \underset{1 \leq i \leq n}{\operatorname{argmax}} Y_i$$

Jaki rozkład ma zmienna losowa Y?

(A) $Pr(Y = k) = \dfrac{1}{C_1} \dfrac{(exp(x_k))^k}{k!} e^{-exp(x_k)}, \quad C_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(exp(x_i))^i}{i!} e^{-exp(x_i)},$

$k = 1, \ldots, n$

(B) $Pr(Y = k) = \dbinom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}, \quad p = \dfrac{\max\limits_{1 \leq s \leq n} exp(x_s)}{C}, \quad k = 1, \ldots, n$

(C) $Pr(Y = k) = \pi(x_k), \quad k = 1, \ldots, n$

(D) $Pr(Y = k) = \dbinom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}, \quad p = \dfrac{1}{C}, \quad k = 1, \ldots, n$

(E) $Pr(Y = k) = \dfrac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 listopada 2018r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	E	
4	A	
5	B	
6	E	
7	C	
8	C	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.