

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXX Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.**

**Matematyka finansowa**

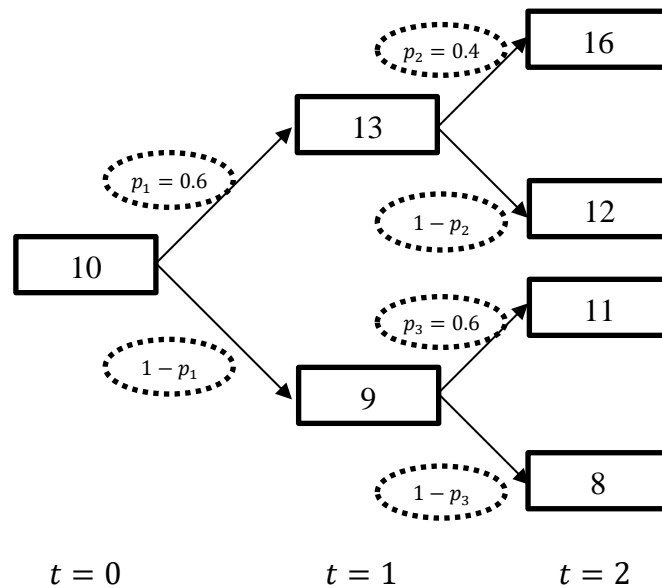
**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Rozważmy dwuokresowy model rynku  $\mathcal{M} = (S_t^0, S_t^1)$ , gdzie  $S_t^0$  opisuje cenę aktywa bezryzykownego, podczas gdy  $S_t^1$  opisuje cenę niepłacącej dywidendy akcji,  $t = 0, 1, 2$ . Zakładamy, że  $S_0^0 = 1$ , natomiast  $S_0^1 = 10$ . Przyjmujemy, że kapitalizacja jest ciągła, a oprocentowanie stałe i równe w skali jednego okresu  $r = 3\%$ .

Proces cen akcji  $S_t^1$  opisany jest następująco:



Proszę wyznaczyć wartość w chwili 0  $V_0$  dla portfela replikującego dla opcji binarnej o funkcji wypłaty:

$$X(S_2^1) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } S_2^1 > 14 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 0.057
- (B) 0.107
- (C) 0.157
- (D) 0.207
- (E) 0.257

**Zadanie 2.**

Niech  $T_0 = 0$ . Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje  $\mathcal{A}$  o cenie  $S_{T_0} = 100$ .

Spółka ABC sprzedaje produkt inwestycyjny z gwarancją, przy czym gwarancja skonstruowana jest w taki sposób, iż wypłata z niej jest ekwiwalentna wypłacie z dwuletniej europejskiej opcji sprzedaży na akcję  $\mathcal{A}$  z ceną wykonania  $K = 105$ .

Przez  $N$  oznaczmy dystrybuantę rozkładu normalnego o średniej 0 i wariancji 1.

Niech  $\sigma$  opisuje zmienność cen akcji  $\mathcal{A}$ , stopa wolna od ryzyka  $r = 2\%$ , natomiast

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left( \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + 2 \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{2}.$$

Przyjmijmy, że w chwili  $T_0$  zachodzi:

- $N(d_1) = 0.84134$
- $N(d_2) = 0.70540$ .

W celu zabezpieczenia się przed ryzykiem związanym z gwarancją spółka ABC stosuje strategię budowy portfela replikującego, zakładającą inwestycje w instrument wolny od ryzyka oraz w akcję  $\mathcal{A}$ . Proszę określić kwoty zainwestowane w chwili  $T_0$  w instrument wolny od ryzyka ( $V^B$ ) oraz akcję  $\mathcal{A}$  ( $V^{\mathcal{A}}$ ). Proszę podać najbliższą wartość.

- (A)  $(V^B, V^{\mathcal{A}}) = (29.72, -15.87)$
- (B)  $(V^B, V^{\mathcal{A}}) = (27.72, -13.87)$
- (C)  $(V^B, V^{\mathcal{A}}) = (25.72, -11.87)$
- (D)  $(V^B, V^{\mathcal{A}}) = (23.72, -9.87)$
- (E)  $(V^B, V^{\mathcal{A}}) = (21.72, -7.87)$

**Zadanie 3.**

Dane są dwa fundusze  $\Phi$  i  $\Psi$ . W chwili 0 na fundusz  $\Phi$  wpłacana jest kwota 2, natomiast na fundusz  $\Psi$  – kwota  $\frac{1}{3}$ . Zakumulowana wartość wpłaconych w chwili 0 kwot wynosi:

- $2 + 3t$ ,  $t > 0$ , w przypadku funduszu  $\Phi$ ,
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{72}t^3$ ,  $t > 0$ , w przypadku funduszu  $\Psi$ .

Wartość  $T > 0$ , dla której intensywność oprocentowania  $\delta_{\Phi}(T)$  dla funduszu  $\Phi$  jest równa intensywności oprocentowania  $\delta_{\Psi}(T)$  dla funduszu  $\Psi$ , wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 1.0
- (B) 1.5
- (C) 2.0
- (D) 2.5
- (E) 3.0

**Zadanie 4.**

Rozważmy model Vašiček'a dla stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t), \quad a > 0, \quad r(0) = 0$$

gdzie  $W(t)$  jest procesem Wienera. Przez  $N(\mu, \delta^2)$  oznaczmy rozkład normalny o średniej  $\mu$  i wariancji  $\delta^2$ . Proszę określić rozkład  $r(t)$ .

(A)  $r(t) \sim N\left(\frac{b}{2a}(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 + e^{-2at})\right)$

(B)  $r(t) \sim N\left(\frac{b}{2a}(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-at})\right)$

(C)  $r(t) \sim N\left(\frac{b}{a}(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{a}(1 - e^{-at})\right)$

(D)  $r(t) \sim N\left(\frac{b}{a}(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$

(E)  $r(t) \sim N\left(\frac{b}{a}(1 + e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 + e^{-2at})\right)$

**Zadanie 5.**

Niech  $T_0 = 0$ . Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu i opcję wyboru (*chooser option*) na niepłacącą dywidendy akcje  $\mathcal{A}$ . Nabywca tej opcji będzie miał prawo określenia w chwili  $T_1 = 1$ , czy kontrakt ten jest opcją kupna czy też opcją sprzedaży (z ceną wykonania  $K = 120$  oraz datą wygaśnięcia  $T_2 = 3$ ). Wiedząc, że  $S_0 = 100$ ,  $r = 5\%$ , oraz współczynnik zmienności dla akcji  $\mathcal{A}$  wynosi  $\sigma = 0.18$  proszę określić wartość najbliższą cenie opcji wyboru w chwili  $T_0$ :

- (A) 16.0
- (B) 18.0
- (C) 20.0
- (D) 22.0
- (E) 24.0

**Zadanie 6.**

Na rynku Blacka-Scholesa akcja  $\mathcal{A}$  ma cenę PLN 114. W skali roku oczekiwany zwrot wynosi  $\mu = 2.0\%$ , natomiast współczynnik zmienności  $\sigma = 10\%$ . Proszę wyznaczyć 95% przedział ufności dla ceny akcji  $\mathcal{A}$  za 6 miesięcy (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) (94.0 – 137.9)
- (B) (96.0 – 135.9)
- (C) (98.0 – 133.9)
- (D) (100.0 – 131.9)
- (E) (102.0 – 129.9)

**Zadanie 7.**

Rozważmy rentę wieczystą, płaconą z góry, o ratach  $R$ . Przyjmijmy, że stopa procentowa jest stała w całym okresie wypłacania renty. Renta posiada trzech beneficjentów – beneficjenta A, który otrzyma pierwsze  $n$  rat, beneficjenta B, który otrzyma kolejne  $3n$  rat i beneficjenta C, który otrzyma wszystkie pozostałe raty.

Wiedząc, że na moment  $t = 0$  wartość obecna ciągu płatności jaką otrzyma beneficjent A stanowi 20.5% wartości obecnej renty wieczystej, proszę określić jaką część (na moment  $t = 0$ ) wartości obecnej renty wieczystej otrzyma beneficjent C.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 25%
- (B) 30%
- (C) 35%
- (D) 40%
- (E) 45%



**Zadanie 8.**

Kredyt o wartości 400 000 będzie spłacany równymi ratami płatnymi na koniec każdego miesiąca przez okres 20 lat. Nominalna, roczna stopa kredytu wynosi  $i^{(12)} = 5\%$  przy miesięcznej kapitalizacji odsetek.

Niech  $N$  oznacza numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie co najmniej dwa razy większa od spłaty odsetek, a  $M$  numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie co najmniej trzy razy większa od spłaty odsetek. Proszę podać różnicę  $M - N$ .

- (A) 25
- (B) 26
- (C) 27
- (D) 28
- (E) 29

**Zadanie 9.**

Renta wieczysta wypłaca raty na koniec każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku  $2n$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$  wynosi:

$$\frac{n \cdot (2n + 1)}{7^n}.$$

Proszę wskazać wzór wyrażający skapitalizowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli czynnik dyskontowy jest równy  $v$ .

(A)  $\frac{49v^4 + 147v^2}{343 - 147v^2 + 21v^4 - v^6}$

(B)  $\frac{49v^4 + 7v^2}{343 + 147v^2 + 21v^4 + v^6}$

(C)  $\frac{7v^4 + 49v^2}{343 - 147v^2 + 21v^4 - v^6}$

(D)  $\frac{49v^4 + 147v^2}{343 + 147v^2 + 21v^4 + v^6}$

(E)  $\frac{7v^4 + 147v^2}{343 - 147v^2 + 21v^4 - v^6}$

**Zadanie 10.**

Rozważmy kredyt o wartości  $K = 800\,000$ . Kredyt ten będzie spłacany równymi ratami  $R_1$  płatnymi na koniec każdego miesiąca przez okres 30 lat. Nominalna, roczna stopa kredytu wynosi  $i^{(12)} = 6\%$  przy miesięcznej kapitalizacji odsetek.

Natychmiast po zapłaceniu 120 raty kredytobiorca rozważa dokonanie spłaty 20% pozostałego salda zadłużenia. Rata kredytu przeliczona zostałaby wówczas przy założeniu, że sposób płatności i liczba pozostałych do zapłaty rat się nie zmienia. Nowa rata kredytu wynosiłaby  $R_2$ .

Niech dla  $i = 1,2$  oraz  $m = 121, \dots, 360$  kwota  $R\_KAP_i^m$  opisuje kwotę spłaty kapitału w kwocie  $R_i$  dla raty płatnej w miesiącu o numerze  $m$ . Proszę wyznaczyć

$$\frac{R\_KAP_1^{300}}{R\_KAP_2^{300}}$$

- (A) 125%
- (B) 130%
- (C) 135%
- (D) 140%
- (E) 145%

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
<b>3.8</b>	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
<b>3.9</b>	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	D	
5	C	
6	D	
7	D	
8	D	
9	E	
10	A	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.