Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $\theta > 0$. Obserwujemy wartości

$$Y_i = \left\lfloor \frac{2}{3} X_i \right\rfloor, \quad i = 1, \ldots, n$$

(gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą m taką, że $m \leq x$). Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Estymator największej wiarogodności parametru θ oparty na obserwacjach $Y_1, \ldots, Y_n$ podany jest wzorem:

(A) $\dfrac{3S}{3S - 2n}$

(B) $-\dfrac{2}{3} \ln\left(\dfrac{S}{S+n}\right)$

(C) $-\ln\left(\dfrac{3S}{2n+3S}\right)$

(D) $-\dfrac{2}{3} \ln\left(\dfrac{2S}{2S+3n}\right)$

(E) $\ln\left(\dfrac{3S}{3S-2n}\right)$

Zadanie 2.

Wektor losowy (X,Y) ma łączny rozkład

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{dla } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Niech $M = Y - X$ oraz $N = 6X - 3Y$. Ile wynosi $E(N|M = -\frac{1}{2})$?

(A) 3

(B) 4

(C) $\frac{19}{8}$

(D) $\frac{19}{24}$

(E) $\frac{31}{8}$

Zadanie 3.

Wybieramy z koła jednostkowego dwa punkty $P_1 = (X_1, Y_1)$ oraz $P_2 = (X_2, X_2)$ w następujący sposób:

$$X_1 = R_1 \cos(\theta_1), \quad X_2 = R_2 \cos(\theta_2),$$

$$Y_1 = R_1 \sin(\theta_1), \quad Y_2 = R_2 \sin(\theta_2),$$

gdzie R_1, R_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$, a θ_1, θ_2 są niezależnymi (również od R_1 i R_2) zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,2\pi)$.
Niech $D(P_1, P_2)$ oznacza kwadrat odległości między tymi punktami, tzn. $D(P_1, P_2) = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$. Ile wynosi wartość oczekiwana $E[D(P_1, P_2)]$?

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\sqrt{\frac{128}{45\pi}}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{1}{3\pi}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Mamy dwie urny, A i B. Początkowo w urnie A znajdują się 3 czare kule, a w urnie B znajdują się 4 białe kule. Losujemy po jednej kuli z obu urn - po czym je zamieniamy (kulę wylosowaną z urny A wkładamy do urny B, a tą wylosowaną z urny B wkładamy do urny A). Ile wynosi granica (gdy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa zdarzenia, że w n-tym kroku obie wylosowane kule są tego samego koloru?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{4}{7}$

(C) $\frac{22}{35}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

Niech $X_1,\ldots,X_n, n \geq 4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej o gęstości f. Zdefiniujmy

$$M_n = \max(X_1,\ldots,X_n).$$

Ile wynosi $Pr\left(M_n \leq F^{-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$ dla ustalonego $t \in (0,n)$?

(A) $e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^2}$

(B) $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$

(C) $1 - \left(\frac{t}{n}\right)^n$

(D) $1 - \frac{t}{n}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o średniej 1, tj. o gęstości $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$. Zdefiniujmy

$$R = \max(X_1, \ldots, X_n) - \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Ile wynosi wartość oczekiwana ER ?

(A) $\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}$

(B) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+1-i}$

(C) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$

(D) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1-i}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Wektor (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(\mu,\Sigma)$ ze średnią $\mu = (0,0.5)$ i macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy zmienne losowe: $U = e^X$ oraz $V = e^Y$. Ile wynosi $Cov(U,V)$?

(A) e^2

(B) e^3

(C) $e^4 - e^2$

(D) $e^4 - e^3$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Zmienna losowa X przyjmuje wartości 1,2,3. Wiadomo, że $Pr(X = 1) = 1/4$. Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co X. Zdefiniujmy

$$Y_i = |\{k : X_k = i\}|, \quad i = 1,2,3$$

(tj. Y_i mówi o tym, ile razy pojawiła się liczba i wśród n eksperymentów).

Wiadomo, że $Cov(Y_1 + Y_2, Y_2 + Y_3) = -\frac{1}{16}n$. Ile wynosi EX?

(A) 2

(B) $\frac{17}{8}$

(C) $\frac{10}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.

Zmienna losowa o rozkładzie Pareto(m, α) (gdzie $m > 0, \alpha > 1$) ma gęstość

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha m^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & x > m, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, n \geq 3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U(0,\theta), \theta > 0$, tj. o gęstości $f(x) = \frac{1}{\theta}$ dla $x \in (0,\theta)$. Załóżmy, że rozkład *a priori* parametru θ ma rozkład Pareto(m, α). Ile wynosi $E(\theta)$, gdzie θ jest rozkładem *a posteriori* – pod warunkiem, iż zaobserwowano $X_1 = x_1 > 0, \ldots, X_n = x_n > 0$?

(A) $\dfrac{m+\alpha}{n+\alpha-1}\max(m, \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i))$

(B) $\dfrac{n+\alpha}{2(m+\alpha-1)}\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i)$

(C) $\dfrac{n+\alpha}{m+\alpha-1}\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i)$

(D) $\dfrac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\max(m, \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}(x_i))$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Rozpatrzmy następujący algorytm:
[$U(0,1)$ oznacza rozkład jednostajny na odcinku (0,1), wszystkie symulacje U_1, U_2 są niezależne, $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą m taką, że $m \leq x$].

1. Wysymuluj $U_1 \sim U(0,1)$ i podstaw $Y = \left\lfloor -\dfrac{\ln(U_1)}{\ln(2)} \right\rfloor$.
2. Wysymuluj $U_2 \sim U(0,1)$. Jeśli $U_2 \leq \dfrac{2^{Y+1}}{4Y!}$ to zwróć $X := Y$, **KONIEC**,

   w przeciwnym przypadku **IDŹ DO LINII** 1.

Jaki rozkład ma wynik działania algorytmu, tj. zmienna X?

Oznaczenia (dla $p \in (0,1)$ oraz $\lambda > 0$):

- $X \sim Geo0(p)$ oznacza rozkład $Pr(X = k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, \ldots$
- $X \sim Geo1(p)$ oznacza rozkład $Pr(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$
- $X \sim Pois(\lambda)$ oznacza rozkład $Pr(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1 \ldots$

(A) $X \sim Geo0\left(\frac{1}{4}\right)$

(B) $X \sim Pois(4)$

(C) $X \sim Geo1\left(\frac{1}{2}\right)$

(D) $X \sim Pois(1)$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	A	
4	D	
5	B	
6	C	
7	D	
8	A	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.