

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Rozważmy portfel składający się z dwóch aktywów,  $S_1$  oraz  $S_2$ , których zmianę wartości w ciągu roku w zależności od zrealizowanego scenariusza przedstawia poniższa tabela:

| Scenariusz | Prawdopodobieństwo zajścia scenariusza | Zmiana wartości aktywa $S_1$ | Zmiana wartości aktywa $S_2$ |
|------------|--|------------------------------|------------------------------|
| $\omega_1$ | 0,4                                    | -10%                         | 20%                          |
| $\omega_2$ | 0,3                                    | 0%                           | 10%                          |
| $\omega_3$ | 0,3                                    | 20%                          | 10%                          |

Stosunek udziału aktywa  $S_1$  do udziału aktywa  $S_2$  w portfelu o minimalnej wariancji wynosi w przybliżeniu:

- (A) -0.22
- (B) 0
- (C) 0.17
- (D) 0.35
- (E) 2.83

**Zadanie 2.**

Spółki *A* i *B* mają możliwość zaciągnięcia 5-letniego kredytu w wysokości 1 miliona złotych o następujących rocznych stopach oprocentowania:

| Spółka   | Oprocentowanie stałe | Oprocentowanie zmienne |
|----------|----------------------|------------------------|
| <i>A</i> | 7.3%                 | <i>WIBOR</i> + 0.5%    |
| <i>B</i> | 6%                   | <i>WIBOR</i> - 0.1%    |

Jeżeli spółka *A* zaciągnie kredyt o oprocentowaniu, dla którego ma przewagę komparatywną względem spółki *B*, a spółka *B* zaciągnie kredyt o oprocentowaniu, dla którego ma przewagę komparatywną względem spółki *A*, a następnie obie spółki dokonają transakcji swap na stopę procentową, jednakowo atrakcyjnej dla każdej ze spółek, z udziałem instytucji pośredniczącej, która zrealizuje zysk o wartości 3000 złotych rocznie, wówczas oprocentowanie nogi stałej swap'u wyniesie:

- (A) 5.9%
- (B) 6.0%
- (C) 6.5%
- (D) 7.1%
- (E) 7.2%

**Zadanie 3.**

Na początku roku (w chwili  $t = 0$ ) portfel pewnego funduszu inwestycyjnego składa się z obligacji, o których wiadomo, że:

- obligacje płacą raz w roku kupony w wysokości 4% wartości nominalnej;
- cena jednej obligacji wyznaczona przy stopie procentowej 6% wynosi 80.6% jej wartości nominalnej;
- duracja jednej obligacji wyznaczona przy stopie procentowej 6% wynosi 11.11.

Na początku następnego roku (w chwili  $t = 1$ ) kwoty otrzymane z kuponów zostały zainwestowane w dwuletnie obligacje zerokuponowe. Duracja portfela funduszu inwestycyjnego w chwili  $t = 1$  przy stopie procentowej 6% wynosi w przybliżeniu:

- (A) 9.11
- (B) 9.63
- (C) 10.21
- (D) 10.67
- (E) 11.11

**Zadanie 4.**

Rozważmy model Vašíček'a dla stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t), \quad a > 0, \quad r(0) = 0$$

gdzie  $W(t)$  jest standardowym procesem Wienera.

Założmy, że  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $\sigma = 0.04$ . Proszę określić 95% przedział ufności dla  $r(1)$ . Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) (0.045 , 0.270)
- (B) (0.070 , 0.245)
- (C) (0.095 , 0.220)
- (D) (0.120 , 0.195)
- (E) (0.145 , 0.170)

**Zadanie 5.**

Bank proponuje klientom lokatę na okres 1 roku kalendarzowego. Lokata ta gwarantuje klientowi, że po roku otrzyma wypłatę zadaną następującym wzorem:

$$K(1) = L \max\left(\frac{IDX(1)}{IDX(0)}, 1 + r\right), \text{ gdzie}$$

$L$  oznacza zainwestowaną w chwili 0 kwotę, a  $IDX(t)$  opisuje wartość referencyjnego indeksu w chwili  $t$ .

Wiadomo, że indeks wzrasta w ciągu każdych 3 miesięcy o 10% z prawdopodobieństwem 50% lub maleje o 8% z prawdopodobieństwem 50%. Ile wynosi (w momencie zawarcia lokaty) wartość oczekiwana udzielanej przez bank gwarancji wypłaty kwoty  $K(1)$  w momencie wygaśnięcia lokaty, wyrażona jako procent zainwestowanej kwoty  $L$ , tj. wartość

$$\frac{E\{K(1) - (1 + r)L\}}{(1 + r)L},$$

przy założeniu, że stopa wolna od ryzyka w okresie trwania inwestycji wynosi  $r = 4,06\%$ . Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 4 %
- (B) 5 %
- (C) 6 %
- (D) 7 %
- (E) 8 %

**Zadanie 6.**

Rozważmy następujący model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są cztery obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio;
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio:  $P(0,1) = 0.930$ ,  $P(0,2) = 0.870$ ,  $P(0,3) = 0.820$ ,  $P(0,4) = 0.780$  (gdzie  $P(t, T)$  oznacza cenę w chwili  $t$  obligacji wygasającej w momencie  $T$ ).

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

|          | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ |
|----------|------------|------------|------------|
| $P(1,2)$ | 0.970      | 0.900      | 0.870      |
| $P(1,3)$ | 0.930      | 0.830      | 0.800      |
| $P(1,4)$ | 0.870      | $X$        | 0.710      |

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość  $X$ , przy której model ten jest wolny od arbitrażu, wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 0.791
- (B) 0.801
- (C) 0.811
- (D) 0.821
- (E) 0.831

**Zadanie 7.**

Rozważmy niepłacącą dywidendy akcję  $\mathcal{A}$ , której proces ceny  $S_t$  zadany jest następującym równaniem:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW(t), \quad r, \sigma > 0,$$

gdzie  $W(t)$  jest standardowym procesem Wienera.

Założmy, że na rynku dostępne są dwa instrumenty pochodne na akcję  $\mathcal{A}$ . Oba wygasają w tym samym momencie  $T$ . Przyjmijmy, że ich wartości w chwili  $t$  zadane są funkcjami  $P_1(S_t, t)$  oraz  $P_2(S_t, t)$ .

Inwestor w chwili  $t$  posiada następujące informacje:

|                       | Instrument $P_1$ | Instrument $P_2$ |
|-----------------------|------------------|------------------|
| Parametr grecki Delta | 0.3              | -0.3             |
| Parametr grecki Theta | -1.24            | -0.7             |
| Cena                  | 0.4              | $P_2(S_t, t)$    |

Proszę określić wartość  $P_2(S_t, t)$ , wiedząc, iż  $r = 3\%$ ,  $\sigma = 20\%$  oraz zachodzi:

$$S_t^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 P_1(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 P_2(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) = 100.$$

- (A) 1.2
- (B) 1.4
- (C) 1.6
- (D) 1.8
- (E) 2.0



**Zadanie 8.**

Kredyt w wysokości 600 000 PLN ma być spłacany przez okres 30 lat w następujący sposób:

- przez pierwsze 10 lat na końcu każdego roku spłacane będzie jedynie 35% kwoty odsetek od oryginalnego (nominalnego) zadłużenia,
- przez następne 5 lat na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od kwoty bieżącego zadłużenia,
- przez kolejne 5 lat na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie w tym okresie zapłacone zostanie 20% nominalnej kwoty zadłużenia,
- przez ostatnie 10 lat na końcu każdego roku kredyt spłacany będzie przy użyciu równych rat w wysokości  $R$ .

Proszę wyznaczyć wartość  $R$ , jeśli wiadomo, że w pierwszych 10 latach stopa procentowa wyniesie 2.00%, w następnych 5 latach 3.00%, w kolejnych 5 latach 3.50%, a podczas ostatnich 10 lat 3.75%. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 83 449 PLN
- (B) 82 449 PLN
- (C) 81 449 PLN
- (D) 80 449 PLN
- (E) 79 449 PLN

**Zadanie 9.**

Założmy, że trzy osoby biorą z banku kredyt w kwocie 200 000 PLN każdy. Kredyty są spłacane za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku przez 15 lat. Każda z osób ma inny plan spłaty kredytu;

- osoba pierwsza spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $P, P - 700, P - 1\,400, \dots, P - 9\,800$  (każda rata jest o 700 mniejsza od poprzedniej);
- osoba druga spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $Q, 2Q, 3Q, \dots, 15Q$ ;
- osoba trzecia spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $R, (1,05)^1R, (1,05)^2R, \dots, (1,05)^{14}R$ .

Roczna efektywna stopa procentowa wynosi  $i = 3\%$ . Ile wynoszą sumaryczne odsetki zapłacone przez wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów (proszę podać najbliższą wartość)?

- (A) 170 500 PLN
- (B) 173 500 PLN
- (C) 176 500 PLN
- (D) 179 500 PLN
- (E) 182 500 PLN

**Zadanie 10.**

Inwestor zakupił 10 letnią obligację o nominale 100 PLN, kuponie 6% w skali roku płaconym na koniec każdego półrocza. Obligacja ma wbudowaną opcję przedłużenia (*extendable bond*) o kilku możliwych terminach wykupu w okresie przedłużenia, który wynosi 6 lat. Oznacza to, że w chwili pierwotnego momentu wygaśnięcia (10 lat) emitent może zdecydować o przedłużeniu czasu trwania obligacji, przy utrzymaniu początkowych założeń odnośnie wypłacanego kuponu. Ponadto ma on prawo wyboru momentu zapadalności (wykupu) obligacji w okresie przedłużenia. Możliwe zapadalności mogą przypadać w momentach wypłaty kuponu, przy czym nie jest możliwy wykup obligacji przed upływem pierwotnego 10-letniego okresu trwania jak również przed upływem tego okresu nie jest znana decyzja emitenta o przedłużeniu i wyborze momentu zapadalności. Wartość wykupu zależy od roku obligacji, w którym nastąpi wykup (przy czym pierwszy rok rozpoczyna się w momencie emisji  $t = 0$  i każdy  $n$ -ty rok obligacji rozpoczyna się po wypłacie kuponu należnego za  $(n-1)$ -wszy rok):

| Rok obligacji        | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Wartość wykupu (PLN) | 100.0 | 116.0 | 116.0 | 108.0 | 108.0 | 148.0 | 148.0 |

Jaką największą cenę może zapłacić inwestor w momencie zakupu ( $t = 0$ ), jeśli chce on osiągnąć stopę dochodowości obligacji co najmniej 8% w skali roku (przy dyskretnej kapitalizacji zgodnej z częstotliwością wypłaty kuponu, tj. 4% w skali półrocza)? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 86.0
- (B) 87.0
- (C) 88.0
- (D) 89.0
- (E) 90.0

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

| Z   | 0.00    | 0.01    | 0.02    | 0.03    | 0.04    | 0.05    | 0.06    | 0.07    | 0.08    | 0.09    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |
| 3.8 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99995 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja ♦ |
|------------|-----------|-------------|
| 1          | D         |             |
| 2          | D         |             |
| 3          | C         |             |
| 4          | C         |             |
| 5          | D         |             |
| 6          | D         |             |
| 7          | C         |             |
| 8          | A         |             |
| 9          | B         |             |
| 10         | A         |             |
|            |           |             |

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.