Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Losujemy niezależnie dwie liczby X_1, X_2 z rozkładu o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Dzielimy odcinek $[0,1]$ na 3 części: $[0, \min(X_1,X_2))$, $[\min(X_1,X_2), \max(X_1,X_2))$, $(\max(X_1,X_2), 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można ułożyć trójkąt?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{11}{48}$

(D) $\frac{5}{24}$

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 2.

Niech X_1, X_2, X_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $P(X_i = k) = (1 - p_i)p_i^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots$, gdzie $p_i = 2^{i-4}$. Zdefiniujmy zmienną losową

$$Y = \mathbb{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad X_1 \leq X_2 \leq X_3, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Ile wynosi EY ?

(A) $\frac{32}{45}$

(B) $\frac{16}{21}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{32}{63}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.

Załóżmy, że losujemy jednostajnie, niezależnie, ze zwracaniem $n \geq 7$ liter ze zbioru $\{\mathsf{A}, \mathsf{C}, \mathsf{G}, \mathsf{T}\}$, oznaczmy przez X_i wynik i-tego losowania. Innymi słowy mamy n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = \mathsf{A}) = P(X_i = \mathsf{C}) = P(X_i = \mathsf{G}) = P(X_i = \mathsf{T}) = 1/4, i = 1, \ldots, n$. Niech Y_n będzie zmienną losową oznaczającą liczbę wystąpień wzorca $(A, ?, A)$ (gdzie '?' oznacza dowolną z liter A, C, G, T) w ciągu $(X_1, \ldots, X_n)$.

Uwaga: np. dla $n = 7$ w ciągu (A,C,A,T,A,T,G) wzorzec (A,?,A) występuje $Y_7 = 2$ razy (wystąpienia się nakładają, pierwszy wzorzec $(X_1, X_2, X_3) = (\mathsf{A,C,A})$, drugi wzorzec $(X_3, X_4, X_5) = (\mathsf{A,T,A})$).

Ile wynosi EY_n?

(A) $\dfrac{n-2}{16}$

(B) $\dfrac{n}{32}$

(C) $\dfrac{3n-1}{32}$

(D) $\dfrac{3n+1}{32}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0), i = 1, \ldots, 4$, gdzie $p \in (0,1)$. Testujemy hipotezę

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \qquad vs. \qquad H_1 : p = \frac{1}{4}$$

na poziomie istotności $\alpha = \frac{11}{16}$. Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^{4} X_i$. Jednostajnie najmocniejszy test odrzuca hipotezę H_0, gdy

(A) $S < 2$

(B) $S \leq 2$

(C) $S > 2$

(D) $S > 1$

(E) $S < 3$

Zadanie 5.

Mamy dane dwa rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_i\}, \{q_i\}, i = 1, \ldots, 10$:

i :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i :	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.3	0.1
q_i :	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1

Oznaczmy $E := \{1, \ldots, 10\}$. Rozpatrzmy zbiór dwuwymiarowych rozkładów, takich, że rozkładami brzegowymi są $\{p_i\}, \{q_i\}, i \in E$,

$$\mathscr{W} := \{w\colon \text{ rozkład na } E^2 \text{ taki, że } \forall (i \in E) \sum_{j=1}^{10} w(i,j) = p_i \text{ oraz } \forall (j \in E) \sum_{i=1}^{10} w(i,j) = q_j\}.$$

$(X,Y) \sim w$ oznacza, iż wektor (X,Y) ma rozkład w, tzn. $P(X = i, Y = j) = w(i,j)$.
Ile wynosi

$$\inf_{\substack{(X,Y)\sim w \\ w \in \mathscr{W}}} P(X \neq Y)?$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{10}$

(C) $\frac{9}{10}$

(D) $\frac{2}{5}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech X będzię zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2, a Y zmienną losową Poissona z parametrem 8, niezależną od X.

(Zmienna losowa Z jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$ jeśli $P(Z=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, \ldots$).

Niech T oznacza rozkład zmiennej losowej X pod warunkiem $X+Y = 100$, tzn.

$$P(T=k) = P(X=k|X+Y=100), \quad k = 0, 1, \ldots, 100$$

Ile wynosi $VarT$?

(A) 14

(B) 16

(C) 18

(D) 32

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 1$ oznaczają wyniki kolejnych niezależnych rzutów kostką, tzn. są to niezależne zmienne losowe o rozkładzie $P(X_i = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \ldots, 6$.

Niech Y_n oznacza liczbę różnych wyników wśród $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (np. gdy $X_1 = X_2 = X_3 = 4$, to $Y_3 = 1$, natomiast, gdy $X_1 = X_2 = 3, X_3 = 6, X_4 = 5, X_5 = 3$, to $Y_4 = 3$). Przyjmujemy $Y_0 = 0$.

Ile średnio trzeba wykonać rzutów, by każdy z wyników się pojawił? Innymi słowy, ile wynosi ET, gdzie

$$T = \min\{n \geq 0 : Y_n = 6\}?$$

(A) 11.9

(B) 15.0

(C) 13.8

(D) 14.7

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Erlanga z parametrem kształtu $k > 0$ (liczba całkowita) oraz częstością $\lambda > 0$ (liczba rzeczywista), tj. o gęstości

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Oznaczmy $\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Ustalmy $s \in \{1, \ldots, n\}$. Ile wynosi $Cov(\hat{X}, X_s - \hat{X})$?

(A) $\frac{2k(\lambda + kn)}{n^2\lambda}$

(B) $\frac{2k(\lambda + kn)}{n\lambda^2}$

(C) $\frac{k(\lambda + kn)}{n^2\lambda^2}$

(D) $\frac{k(\lambda + kn)}{n\lambda^2}$

(E) 0

Zadanie 9.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3, tzn. o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{jeśli} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Oznaczmy $S = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$. Ile wynosi $P(X_1 > S)$?

(A) $\frac{37}{64}$

(B) $\frac{11}{16}$

(C) $\frac{27}{64}$

(D) $\frac{11}{32}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Zmienna losowa X ma rozkład standardowy normalny $N(0,1)$, tj. ma gęstość:
$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Ustalmy $r > 0$ i zdefiniujmy

$$Y := \begin{cases} X & \text{jeśli} \quad |X| < r, \\ -X & \text{jeśli} \quad |X| \geq r. \end{cases}$$

Kowariancja $Cov(X,Y)$ wynosi 0 dla parametru r spełniającego równość:

(A) $\int_r^{\infty} x^2 \phi(x) = \frac{1}{4}$

(B) $\int_r^{\infty} x^2 \phi(x) = \frac{1}{2}$

(C) $\int_r^{\infty} x^2 \phi(x) = \frac{1}{11}$

(D) $\int_r^{\infty} x^2 \phi(x) = \frac{1}{16}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 18 listopada 2019r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	A	
4	E	
5	D	
6	B	
7	D	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.