

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 2 Marca 2020r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Dane jest natężenie śmiertelności $\mu(t) = \frac{2}{1+t} + \frac{2}{100-t}$, dla $0 < t < 100$. Zakładając, że liczność populacji narażonej na takie ryzyko śmiertelności wynosi $L(0) = 10\,000$, proszę obliczyć liczbę zgonów w przedziale $1 < t < 4$.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 2 052
- (B) 2 082
- (C) 2 112
- (D) 2 142
- (E) 2 182

Zadanie 2.

W modelu ciągłym rozważmy potencjalnego klienta zakładu ubezpieczeń $(x) = 50$ wylosowanego z populacji de Moivre'a, z parametrem $\omega = 100$. Klient posiada majątek M oraz rozważa zakup renty dożywotniej, ciągłej, płaconej z intensywnością roczną kwotę R . (Klient ignoruje w swoich rozważaniach wartość pieniądza w czasie, zatem można przyjąć, iż dla jego kalkulacji natężenie oprocentowania $\delta = 0$.)

Funkcja użyteczności tego klienta to $u(x) = -e^{-dx}$ (dla pewnego $d > 0$). Jaką maksymalną kwotę składki za ubezpieczenie rentowe będzie skłonny zapłacić ten inwestor?

(A) $\frac{1}{2d} \ln\left(\frac{50dR}{1-e^{-50dR}}\right)$

(B) $\frac{1}{d} \ln\left(\frac{100dR}{1-e^{-50dR}}\right)$

(C) $\frac{1}{d^2} \ln\left(\frac{50dR}{1-e^{-50dR}}\right)$

(D) $\frac{1}{d} \ln\left(\frac{50dR}{1-e^{-50dR}}\right)$

(E) $\ln\left(\frac{50d^2R}{1-e^{-50dR}}\right)$

Zadanie 3.

W ubezpieczeniu na życie i dożycie, ze składką roczną płaconą z góry przez n lat, wystawionym dla życia (x) dane są: stopa techniczna $i = 1,5\%$, $q_x = 0,00246$, $q_{x+1} = 0,0027$, oraz $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 9,2283$.

Rezerwa na życie ustalona przy użyciu składki netto na koniec drugiego roku ubezpieczenia wynosi 7 826 zł.

Rezerwa na życie ustalona przy użyciu metody Zillmera na koniec drugiego roku ubezpieczenia wynosi 6 850 zł.

Ile wynoszą bezpośrednie koszty jednorazowe związane z zawarciem umowy ubezpieczenia wliczone w składkę brutto za to ubezpieczenie?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1 080 zł
- (B) 1 100 zł
- (C) 1 200 zł
- (D) 1 240 zł
- (E) 1 280 zł

Zadanie 4.

Życie (x) zostało wylosowane z populacji z natężeniem śmiertelności Weibull'a $\mu_y = 2\lambda y$, $\lambda > 0$. Na życie (x) została wystawiona renta ciągła, wypłacająca z intensywnością roczną kwotę R . Natężenie oprocentowania wynosi δ .

Po jakim czasie wartość otrzymanych świadczeń rentowych będzie wyższa od wartości składki jednorazowej netto za to ubezpieczenie?

(Poniżej, ϕ - oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$.)

(A) $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda y} \left(1 - \phi(\sqrt{2\lambda}y)\right)$, dla $y = x + \frac{\delta}{2\lambda}$

(B) $\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{2\lambda y} \left(1 - \phi(\sqrt{\lambda}y)\right)$, dla $y = x + \frac{\delta}{\lambda}$

(C) $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda y} \left(\phi(\sqrt{2\lambda}y)\right)$, dla $y = x + \frac{\delta}{2\lambda}$

(D) $\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{2\lambda y} \left(\phi(\sqrt{\lambda}y)\right)$, dla $y = x + \frac{\delta}{\lambda}$

(E) $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\lambda y} \left(1 - \phi(\sqrt{\lambda}y)\right)$, dla $y = x + \frac{\delta}{2\lambda}$

Zadanie 5.

Zakład ubezpieczeń posiada w swoim portfelu 1000 polis ubezpieczenia na życie powiązanych z kredytami hipotecznymi. Zakład ustalił iż, rozkład sum ubezpieczenia w dobrym przybliżeniu oddaje funkcja $SU(i) = 70000 \times e^{(i/300)}$ (zł), dla $i = 0, \dots, 999$. Zakład rozważa reasekurację tego portfela polis poprzez umowę typu nadwyżki szkody („surplus”) z zachowkiem 500 000 zł.

Zakład nie posiada informacji o strukturze wiekowej oraz strukturze płci tego portfela, wiadomo jednak iż, do modelowania szkodowości można przyjąć stały wskaźnik śmiertelności (prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku) $q = 0,015$.

X jest zmienną losową wyrażającą świadczenia wypłacone (na udziale własnym zakładu) w ciągu roku. Współczynnik zmienności ryzyka zdefiniowany jest jako

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}.$$

Zakładając iż pojedyncze ryzyka w portfelu są od siebie niezależnie, proszę obliczyć różnicę pomiędzy współczynnikiem zmienności ryzyka dla całego portfela w przypadku gdy nie jest on reasekurowany oraz gdy jest reasekurowany. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 5,6%
- (B) 5,9%
- (C) 6,2%
- (D) 6,5%
- (E) 6,9%

Zadanie 6.

W modelu ciągłym rozważmy ubezpieczenie na całe życie ze stałymi natężeniami śmiertelności oraz całkowitej niezdolności do pracy (NP). W przypadku zgonu ubezpieczonego wypłacana jest $SU = 100$. W przypadku wystąpienia zdarzenia całkowitej NP ubezpieczonemu wypłacana jest ciągła renta dożywotnia z roczną intensywnością R , przy czym wiadomo, iż natężenie śmiertelności osoby całkowicie niezdolnej do pracy wzrasta trzykrotnie. Po przyznaniu świadczenia z tytułu całkowitej NP ochrona z tytułu śmierci wygasa.

Dane są:

- składka jednorazowa netto $SJN = 200$
- roczne natężenie oprocentowania $\delta = 0,03$
- roczne natężenie śmiertelności $\mu_{x+t} = 0,01$
- oraz roczne natężenie ryzyka całkowitej niezdolności do pracy $\mu_{x+t}^{NP} = 0,02$.

Ile wynosi R ?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 29
- (B) 33
- (C) 37
- (D) 41
- (E) 45

Zadanie 7.

Rozważmy dwa warianty dwudziestoletniego ubezpieczenia na życie i dożycie, ze składką roczną płaconą z góry, wystawionego dla życia $(x) = 25$. W pierwszym wariacie składka i suma ubezpieczenia są stałe, w drugim wariacie składka i suma ubezpieczenia rosną o 3% na początku każdego roku ubezpieczenia (poczynając od drugiego roku).

Dane są: stopa techniczna $i = 2\%$, $q = 0,001$, ${}_k p_x = (1 - q)^k$, dla $k = 1, \dots, 20$.

Ile wynosi stosunek składki netto dla wariantu „indeksowanego” do składki netto dla wariantu ze stałą składką/sumą ubezpieczenia?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1,20
- (B) 1,23
- (C) 1,26
- (D) 1,29
- (E) 1,32

Zadanie 8.

Rozważmy N -letnie ubezpieczenie na życie i dożycie z roczną składką regularną płaconą z góry w stałej wysokości. Suma ubezpieczenia na życie i na dożycie wynosi 10. Stopa techniczna wynosi 2%.

Poniższa tabela zestawia dane dotyczące tego kontraktu dla pewnego $k < N$.

Rok	k	$k+1$	$k+2$
q_{x+k}	0,02073	0,02231	-----
Rezerwa netto na koniec roku k	2,41	-----	2,87

Ile wynosi składka roczna netto za to ubezpieczenie?

Proszę podać najbliższą wartość:

- (A) 0,328
- (B) 0,338
- (C) 0,348
- (D) 0,358
- (E) 0,368

Zadanie 9.

Rozważmy ciągłą rentę małżeńską wystawioną dla mężczyzny i kobiety w wieku 60 lat wylosowanych z populacji de Moivre'a z $\omega = 90$. Renta wypłaca z intensywnością roczną poniższe kwoty:

- $\frac{3}{2}R$ jeśli oboje małżonkowie żyją
- R gdy jedno z małżonków nie żyje
- (oraz 0 zł po śmierci obojga małżonków).

Jednorazowa składka netto wynosi 24 000 zł. Przy założeniu intensywności oprocentowania $\delta = 0,02$ oraz zakładając, iż $T(x)$, $T(y)$ są niezależne, proszę obliczyć wartość R ?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1 110 zł
- (B) 1 140 zł
- (C) 1 170 zł
- (D) 1 200 zł
- (E) 1 230 zł

Zadanie 10.

Rozważmy model ciągły planu emerytalnego, ze stałymi natężeniami prawdopodobieństw.

Pracownik, nie zajmujący stanowiska kierowniczego, przystępuje do planu w wieku 40 lat, a na emeryturę przejdzie za 20 lat. Wynagrodzenie pracownika w chwili przystąpienia do planu emerytalnego ($t = 0$) wynosi 57,6 tys. zł. Składka odprowadzana jest do planu emerytalnego za tego pracownika (w formie renty ciągłej) do czasu osiągnięcia wieku emerytalnego lub wystąpienia jednego z dwóch zdarzeń śmierci lub opuszczenia planu jeśli którekolwiek z tych zdarzeń nastąpi wcześniej.

W przypadku zajścia zdarzenia zgonu pracownika przed osiągnięciem wieku emerytalnego uposażeni otrzymają pięciokrotność rocznego wynagrodzenia pracownika.

Pracownik może awansować na stanowisko kierownicze, wówczas jego wynagrodzenie wzrasta trzykrotnie. Po awansie nie ma możliwości powrotu na stanowisko niekierownicze.

Dane są:

- natężenie oprocentowania $\delta = 0$,
- natężenie śmiertelności $\mu^d = 0,0036$,
- natężenie prawdopodobieństwa odejścia z planu $\mu^w = 0,048$
- natężenie prawdopodobieństwa iż pracownik otrzyma awans na stanowisko kierownicze $\mu^p = 0,0024$.

Proszę podać jaka jest, na dzień przystąpienia do planu, aktuarialna wartość obecna wypłaconych świadczeń z tytułu śmierci pracownika przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Podaj najbliższą odpowiedź.

- (A) 13 140 zł
- (B) 13 240 zł
- (C) 13 340 zł
- (D) 13 440 zł
- (E) 13 540 zł

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	A	
5	A	
6	B	
7	E	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.