Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1. Na koniec roku 2021 analizujemy dane dotyczące pewnej grupy ubezpieczeń o łącznej wartości szkód, które zaszły w latach 2018-2021.
W poniższej tabeli w komórce (t, j) znajduje się zagregowana wartość szkód zaszłych w roku t, które zostały zlikwidowane w ciągu roku $(t + j)$.

opóźnienie w latach j / rok zajścia szkody t	0	1	2	3
2018	1800	700	500	150
2019	1850	750	520	
2020	1950	790		
2021	2000			

Oblicz (stosując standardową metodę Chain-Ladder) wartość tej części rezerwy na odszkodowania i świadczenia, która odpowiada szkodom do zlikwidowania w ciągu roku 2022.
Przyjmij założenie, że proces zgłaszania i likwidacji szkód w tej grupie ubezpieczeń zamyka się w pełni w okresie trzyletnim.
Ww. część rezerwy wynosi:

(A) 1460.0

(B) 1504.0

(C) 1542.5

(D) 1579.2

(E) 1620.8

Zadanie 2.
W pewnym ubezpieczeniu może dojść do co najwyżej jednej szkody w ciągu roku. U ubezpieczonych występuje zjawisko „usypiania czujności". Przejawia się ono w tym, że prawdopodobieństwo że ubezpieczony dozna szkody w danym roku, jest mniejsze po roku szkodowym niż po roku bezszkodowym.
Jeśli więc oznaczymy przez N_t liczbę szkód w roku *t*, to zjawisko usypiania czujności polega na tym, że $\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 1) < \Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 0)$.

Przyjmijmy, że:
$\Pr(N_t = 1|N_{t-1}, N_{t-2}, N_{t-3}, \ldots) = \Pr(N_t = 1|N_{t-1})$, oraz iż:
$\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 1) = 1/10$,
$\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 0) = 3/10$,

Wobec tego $\lim\limits_{t\to\infty} \Pr(N_t = 1)$wynosi:

(A) $1/8$

(B) $1/7$

(C) 1/6

(D) $1/5$

(E) $1/4$

Zadanie 3.

Każde ryzyko z pewnej populacji ryzyk generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. Zróżnicowanie wartości parametru λ w populacji dane jest gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \exp(-x)$$

Niech $T(t)$ oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t* dla losowo wybranego z tej populacji ryzyka.
Wobec tego $E\{T(0) - 1|T(0) > 1\}$ wynosi:

(A) $9/6$

(B) $10/6$

(C) 11/6

(D) 2

(E) $13/6$

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = 1$,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład odwrotny gaussowski o gęstości określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y} - 2\right)\right]$$

Jeśli założymy, że współczynnik dopasowania R (*adjustment coefficient*) ma wynosić 0.18, to intensywność składki c powinna wynieść (z dobrym przybliżeniem):

(A) 1.22

(B) 1.23

(C) 1.24

(D) 1.25

(E) 1.26

Zadanie 5.
Wartość pojedynczej szkody ma rozkład ucięty Pareto o dystrybuancie:

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+y} & gdy\ \ y < 100 \\ 1 & gdy\ \ y \geq 100 \end{cases}$$

Współczynnik zmienności (stosunek odchylenia standardowego do wartości oczekiwanej) tego rozkładu z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 2.82

(B) 2.91

(C) 3.00

(D) 3.09

(E) 3.18

Zadanie 6.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym postaci:

- $U(t) = u + c \cdot t - S(t)$,

gdzie $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, oraz dwupunktowym rozkładem wartości pojedynczej szkody Y, takim, że:

- $\Pr(Y = 1) = \frac{2}{3}$,
- $\Pr(Y = 2) = \frac{1}{3}$.

Wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ jest dla dowolnego kapitału początkowego $u \geq 0$ obustronnie ograniczona:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{u+2} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{u}$.

Wobec tego składka c przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) $\frac{\lambda}{2\ln\frac{3}{2}}$

(B) $\frac{4\lambda}{3\ln\frac{3}{2}}$

(C) $\frac{3\lambda}{4\ln\frac{3}{2}}$

(D) $\frac{2\lambda}{3\ln\frac{3}{2}}$

(E) $\frac{\lambda}{\ln\frac{3}{2}}$

Zadanie 7.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - (W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

- składka roczna wynosi $c = 5 \times \ln\left(\frac{5}{4}\right)$,
- nadwyżka początkowa wynosi $u = c$,
- a łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej jeden.

Oznaczmy przez N moment ruiny, a więc najmniejszą taką liczbę naturalną n, dla której $U_n < 0$. Oczywiście jeśli nadwyżka nigdy nie przyjmie wartości ujemnej, przyjmujemy $N = \infty$.

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(N \le 2 | N < \infty)$ wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.25

(B) 0.27

(C) 0.29

(D) 0.31

(E) 0.33

Zadanie 8.
Ubezpieczeni są losowo dobierani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,5) o wartości oczekiwanej 2/5 i wariancji 2/25.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płatną z góry w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot \mathrm{E}(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot \{\mathrm{E}(\Lambda | N > 0) - \mathrm{E}(\Lambda | N = 0)\}$.

Bonus wynosi:

(A) 0.21μ

(B) 0.22μ

(C) 0.23μ

(D) 0.24μ

(E) 0.25μ

Zadanie 9.
Łączna wartość szkód $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ ma rozkład złożony geometryczny, gdzie liczba szkód ma rozkład:
$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$
zaś wartość pojedynczej szkody Y_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2.

Wobec tego $E(N|X = 2)$ wynosi:

(A) 15/10

(B) 14/10

(C) 13/10

(D) 12/10

(E) 11/10

Zadanie 10.

Niech $X = X_0 + X_1$ oznacza łączną wartość szkód zaszłych w ciągu pewnego roku, przy czy X_0 to łączna wartość szkód zlikwidowanych jeszcze przed końcem tego roku, zaś X_1 to łączna wartość szkód które na koniec roku jeszcze nie są zlikwidowane.

Warunkowe rozkłady tych zmiennych losowych przy zadanej wartości θ parametru ryzyka Θ charakteryzują się następującymi momentami:
$E(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta)$,
$E(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta)$,
$var(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta) \cdot c$,
$var(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta) \cdot c$,
$cov(X_0, X_1|\Theta = \theta) = 0$.

Rozkład parametru ryzyka jest taki, że:
$E[\mu(\Theta)] = \mu$, oraz:
$var[\mu(\Theta)] = a^2$.

Zakładamy, że $Pr[\mu(\Theta) > 0] = 1$, oraz że:
$c > 0$,
$p \in (0, 1)$,
$q = 1 - p$.
Zakładamy że znamy wartości parametrów p, c, μ oraz a^2. Spośród predyktorów zmiennej losowej X_1 postaci:

$$Pred(X_1|X_0) = \beta_1 X_0 + \beta_0$$

najmniejszym błędem średniokwadratowym obarczony jest predyktor dany wzorem:

(A) $\frac{q}{\mu + pa^2}(a^2 x_0 + \mu c)$

(B) $\frac{q}{\mu + pa^2}(a^2 x_0 + \mu c^2)$

(C) $\frac{q}{\mu c + pa^2}(a^2 x_0 + \mu c^2)$

(D) $\frac{q}{\mu c + pa^2}(a^2 x_0 + \mu^2 c^2)$

(E) $\frac{q}{\mu c + pa^2}(a^2 x_0 + \mu^2 c)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...........................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	B	
5	A	
6	C	
7	C	
8	D	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.