

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 10 czerwca 2022r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

W modelu ciągłym natężenie śmiertelności jest zgodne z modelem de'Moivre'a $\mu_{x+t} = (\omega - x - t)^{-1}$, z wiekiem granicznym $\omega = 80$ ($0 < t < 80 - x$). Dane są $x = 25$ oraz stopa techniczna $i = 2\%$.

Ile wynosi ${}_5|a_{x:\overline{15}|}$? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 8,39
- (B) 8,57
- (C) 8,76
- (D) 8,97
- (E) 9,05

Zadanie 2.

Grupa 6 osób w wieku x , $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ oraz $x+5$ pochodzi z populacji dla której, natężenie śmiertelności $\mu_x = A \times 1,32^x$ jest zgodne z modelem „Gompertz’a” (dla pewnego $A > 0$). Przy założeniu, że zmienne losowe czasu zgonu są niezależne, proszę obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, iż osoba w wieku $\geq x+3$ umrze jako pierwsza w tej grupie?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0,607
- (B) 0,625
- (C) 0,647
- (D) 0,673
- (E) 0,697

Zadanie 3.

W ubezpieczeniu na życie i dożycie, ze składką roczną płaconą z góry przez n lat, wystawionym dla życia (x) dane są: stopa techniczna $i = 2\%$, $q_x = 0,00084$, $q_{x+1} = 0,00094$, oraz $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 9,1164$.

Rezerwa na życie ustalona przy użyciu składki netto na koniec pierwszego roku ubezpieczenia wynosi 4 131,65 zł.

Bezpośrednie koszty jednorazowe związane z zawarciem umowy ubezpieczenia wliczone w składkę brutto za to ubezpieczenie wynoszą 2 400 zł.

Ile wynosi rezerwa na życie ustalona przy użyciu metody Zillmer'a na koniec pierwszego roku ubezpieczenia?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1 940 zł
- (B) 1 950 zł
- (C) 1 960 zł
- (D) 1 970 zł
- (E) 1 980 zł

Zadanie 4.

Zakład ubezpieczeń posiada w swoim portfelu 500 umów ubezpieczenia na życie powiązanych z kredytami hipotecznymi. Zakład ustalił iż, rozkład sum ubezpieczenia w dobrym przybliżeniu oddaje funkcja $SU(i) = 10^5 \times e^{(i/200)}$ (zł), dla $i = 0, \dots, 499$. Zakład reasekuruje ten portfel umów poprzez umowę typu nadwyżki szkody („surplus”) z zachowkiem 250 000 złotych.

Struktura wiekowa oraz struktura płci tego portfela nie jest znana, wiadomo jednak iż, do modelowania szkodowości można przyjąć stały wskaźnik śmiertelności (prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku) $q = 0,0025$.

X jest zmienną losową wyrażającą świadczenia wypłacone (na udziale własnym zakładu) w ciągu roku. Zakładając, iż pojedyncze ryzyka w portfelu są od siebie niezależnie, proszę obliczyć ile wynosi $Var(X)$.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) $60,394 \times 10^9$
- (B) $60,694 \times 10^9$
- (C) $61,394 \times 10^9$
- (D) $61,694 \times 10^9$
- (E) $62,394 \times 10^9$

Zadanie 5.

Rozważmy N -letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (x) , z roczną składką regularną płaconą na początku każdego roku ubezpieczenia. Na koniec roku $k = 1, \dots, N$, w którym nastąpi zgon osoby ubezpieczonej wypłacana jest kwota świadczenia $b_k = SU + {}_{k-1}V$ gdzie SU jest stałą sumą ubezpieczenia, natomiast ${}_{k-1}V$ jest rezerwą matematyczną netto na początek roku k . W przypadku dożycia do końca terminu ubezpieczenia, ubezpieczony otrzymuje świadczenie w wysokości $\alpha \times SU$.

Dane są:

- stopa techniczna $i = 0\%$,
- roczna składka netto $P = 1208,47$,
- $SU = 10\,000$,
- czynnik $I_1 = \prod_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{1}{p_{x+k}}\right) = 22239,59$,
- oraz czynnik $I_2 = \prod_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{q_{x+k}}{p_{x+k}}\right) = 1,009676$.

Ile wynosi α ? (Wskazówka: rezerwę matematyczną ${}_N V$ na koniec okresu ubezpieczenia należy wyrazić za pomocą czynników I_1 oraz I_2 .)

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1,15
- (B) 1,20
- (C) 1,25
- (D) 1,33
- (E) 1,50

Zadanie 6.

Rozważmy model ciągły ze stałymi natężeniami śmiertelności oraz oprocentowania δ . Mąż (30) zakupił stałą rentę wdowią dla żony (25), wypłacającą od chwili jego zgonu w sposób ciągły z roczną intensywnością kwotę R . Składka opłacana jest w formie renty ciągłej z roczną intensywnością S do chwili pierwszego zgonu.

Dane są:

- $R = 36\,000$ zł
- Natężenie śmiertelności męża $\mu_{30+t}^{(m)} = 0,025$
- Natężenie śmiertelności żony $\mu_{25+t}^{(k)} = 0,015$
- $\delta = 0,021$

Jaka jest wartość S wyrażona w złotych? Proszę podać wartość najbliższą.

- (A) 24 000
- (B) 24 666
- (C) 25 000
- (D) 25 333
- (E) 26 000

Zadanie 7.

Rozważmy 20-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie, wystawione dla życia (x), ze stałą składką płaconą z góry, z częstotliwością roczną. Zmienna losowa ${}_0L$, wyrażająca stratę zakładu ubezpieczeń na moment $t = 0$, określona jest następująco:

$${}_0L = \begin{cases} \frac{1}{20} (K + 1)v^{K+1} - P\ddot{a}_{K+1} & K = k, \text{ z p-stwem } q(1-q)^k \text{ dla } k = 0, \dots, 19 \\ v^{20} - P\ddot{a}_{20} & \text{z p-stwem } (1-q)^{20} \end{cases}$$

Dane są, stopa techniczna $i = 3\%$, $q = 0,005$, oraz wiadomo, iż P równe jest 110% składki netto za to ubezpieczenie.

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną wyżej określonej straty ($E[{}_0L]$). Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) -0,0534
- (B) -0,0504
- (C) -0,0495
- (D) -0,0405
- (E) -0,0354

Zadanie 8.

W modelu ciągłym o stałym natężeniu śmiertelności $\mu = 0,01$ rozważamy ubezpieczenie terminowe, ze składką jednorazową netto $P = 12\,000$ zł. W razie zgonu ubezpieczonego wypłacana jest kwota $SU = 60\,000$ zł. Przy założonym, stałym natężeniu oprocentowania $\delta > 0$, ochrona ubezpieczeniowa wygasa w chwili $T(\delta) > 0$ gdy rezerwa matematyczna netto ${}_{T(\delta)}V = 0$ (tzn. $T(\delta)$ jest terminem tego ubezpieczenia).

Ile wynosi różnica $T(0,02) - T(0,01)$? (Innymi słowy, o ile lat wydłuży się termin ubezpieczenia, jeśli roczne natężenie oprocentowania wzrośnie od 0,01 do 0,02?)

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 5,0
- (B) 5,1
- (C) 5,2
- (D) 5,3
- (E) 5,4

Zadanie 9.

Rozważamy odroczoną o 10 lat terminową, 20 letnią rentę na życie (x). Renta wypłaca na początku każdego roku umowy (od 11 roku włącznie) kwotę $P/2$. Renta opłacana jest dziesięcioma składkami netto, płatnymi na początku każdego roku, w kwotach P . W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej w ciągu pierwszych 10 lat umowy, na koniec roku, w którym nastąpił zgon, wypłacane jest świadczenie ubezpieczeniowe w kwocie SU .

Dane są następujące wielkości:

- $\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 8,8542$, $\ddot{a}_{x:\overline{30}|} = 18,3249$, $\ddot{a}_{x+10:\overline{20}|} = 12,8181$,
- stopa techniczna $i = 1,42\%$.

Proszę obliczyć ile wynosi stosunek wielkości SU/P . Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 30
- (B) 32
- (C) 34
- (D) 36
- (E) 40

Zadanie 10.

Rozważmy model ciągły planu emerytalnego, ze stałymi natężeniami prawdopodobieństw.

Pracownik przystępuje do planu w wieku (x), a na emeryturę przejdzie za 40 lat. Składka odprowadzana jest do planu emerytalnego za tego pracownika (w formie renty ciągłej) do czasu osiągnięcia wieku emerytalnego lub wystąpienia jednego z dwóch zdarzeń śmierci lub opuszczenia planu, jeśli którekolwiek z tych zdarzeń nastąpi wcześniej. Intensywność roczna składki wynosi 8% rocznego wynagrodzenia pracownika. (Zakładamy, iż wynagrodzenie jest stałe przez cały czas.)

W przypadku zajścia zdarzenia zgonu pracownika przed osiągnięciem wieku emerytalnego uposażeni otrzymają 150% zgromadzonego do chwili zgonu kapitału.

W przypadku odejścia pracownika z pracy wypłacane jest pracownikowi 100% kapitału zgromadzonego na moment odejścia.

Wiadomo, iż przy powyższych założeniach, pracownik po przejściu na emeryturę będzie pobierał z intensywnością roczną rentę dożywotnią w wysokości 10% wynagrodzenia.

W chwili $t = 10$ zmienia się założenie dotyczące odejść pracowników z pracy, nowy paramet intensywności rocznej wynosi $\mu^{(w)} = 0,07$.

Dodatkowo, dane są:

- natężenie oprocentowania $\delta = 2\%$,
- natężenie śmiertelności $\mu^{(d)} = 0,01$.

Proszę podać, o ile punktów procentowych musi zostać zwiększona intensywność roczna składki odprowadzanej do planu, tak aby po przejściu na emeryturę za lat 30, pracownik nadal mógł otrzymać rentę (dożywotnią, ciągłą) z intensywnością roczną w wysokości 10% wynagrodzenia? Podaj najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,1%
- (B) 0,3%
- (C) 0,5%
- (D) 0,7%
- (E) 0,9%

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 6 grudnia 2021r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	E	
3	B	
4	E	
5	B	
6	C	
7	A	
8	A	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.