

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 10 czerwca 2022.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o średniej 1 i wariancji $\sigma^2 > 0$. Niech $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Wiadomo, że

$$\text{Var}(S_3 | S_{12} = 3) = 45.$$

Ile wynosi σ^2 ?

- (A) 16
- (B) 18
- (C) 20
- (D) 22
- (E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Zmienna losowa Y ma rozkład geometryczny $\text{Geom}(p)$, $p \in (0, 1)$ na $0, 1, \dots$, tzn.

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, k = 0, 1, \dots$$

Warunkując $Y = y$, zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem μy , gdzie $\mu > 0$, tzn.

$$P(X = k | Y = y) = \frac{(\mu y)^k}{k!} e^{-\mu y}, k = 0, 1, \dots$$

Ile wynosi $\text{Var}(X)$?

(A) $\frac{1 - p^2}{p^2} \mu^2$.

(B) $\frac{\mu(1 - p)(p + \mu)}{p^2}$

(C) $\frac{\mu(1 - p)(p + \mu)}{p}$

(D) $\frac{1 - p^2}{p^2} \mu$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.

Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n, n \geq 3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3r^3}{x^4} & \text{dla } x \geq r \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $r > 0$. Wiadomo, że

$$T = b \cdot \min(X_1, \dots, X_n)$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru r . Ile wynosi b ?

(A) $\frac{3n}{3n+1}$

(B) $\frac{3n-2}{3n}$

(C) $\frac{3n-1}{3n}$

(D) $\frac{3n}{3n-2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4. Wiadomo, że zmienna losowa X ma następującą funkcję tworzącą momenty:

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-5t)^2} \quad \text{dla } t < 1/5.$$

Jaki jest współczynnik skośności, tj.

$$\mathbf{E} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3$$

(gdzie μ jest średnią, a σ odchyleniem standardowym) tej zmiennej losowej?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (B) $\frac{5}{2}$
- (C) $\frac{2}{5}$
- (D) $\sqrt{2}$
- (E) $\sqrt{5}$

Zadanie 5.

Zmienna losowa U ma rozkład $\mathcal{U}(0, 1)$ (tj. jednostajny na $(0,1)$). Która z poniższych zmiennych losowych ma gęstość

$$f(x) = \frac{50^2}{(4+x)^5}, \quad \text{dla } x \geq 1 ?$$

(A) $S = \frac{5}{\sqrt[6]{U}} - 4$

(B) $T = \frac{6}{\sqrt[5]{1-U}} - 5$

(C) $X = \frac{4}{\sqrt[4]{1-U}} - 3$

(D) $Y = \frac{5}{\sqrt[4]{U}} - 4$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o średniej $\frac{1}{\theta} > 0$.

Wariancja tego rozkładu (funkcja parametru θ) wynosi $g(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Budujemy estymator tej wariancji postaci

$$\hat{g} = a \cdot \text{ENW}(g(\theta)),$$

gdzie $\text{ENW}(g(\theta))$ oznacza estymator największej wiarygodności funkcji g . Dla jakiego a estymator \hat{g} jest nieobciążony?

(A) $\frac{n}{n+1}$

(B) $\frac{n}{n+2}$

(C) $\frac{n}{2(n+1)}$

(D) $\frac{2n}{n+1}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Dla niezależnych zmiennych losowych X, Y o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1 definiujemy

$$U = X + Y, \quad V = 2X - 2Y.$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(0 \leq U \leq 5, 10 \leq V \leq 20)$?

- (A) $\frac{4}{3} (e^{-7} - e^{-4} - e^{-2} + e^{-5})$
- (B) $\frac{5}{3} (e^{-7} - e^{-4} - e^{-5} + e^{-2})$
- (C) $\frac{1}{3} (e^{-4} - e^{-7} - e^{-5} + e^{-2})$
- (D) $\frac{2}{3} (e^{-7} - e^{-4} - e^{-3} + e^{-2})$
- (E) 0

Zadanie 8.

Niech U_1, U_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0, 2)$. Zdefiniujmy $X = |U_1 - U_2|$.

Ile wynosi $\frac{\text{Var} X}{\mathbf{E} X}$?

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{4}{18}$

(C) $\frac{1}{18}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 9.

Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\beta > 0$ (tj. o średniej β^{-1}). Niech N będzie niezależną od tego ciągu zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda > 0$. Zdefiniujmy

$$M_N = \min\{X_1, \dots, X_N\},$$

przyjmujemy $M_0 = 0$. Ile wynosi $Cov(N, M_N)$?

(A) $1 - \frac{\lambda}{\beta} e^{-\lambda}$

(B) $\frac{\lambda}{\beta} e^{-\lambda}$

(C) $\frac{\lambda}{\beta}$

(D) $\frac{1}{\lambda\beta} e^{-\lambda}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

X jest pojedynczą obserwacją z populacji o gęstości

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0, 1),$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Testujemy hipotezę

$$H_0 : \theta = 3, \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2.$$

Weryfikujemy tą hipotezę testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie $\alpha = 0.05$. Taki test odrzuca H_0 , gdy $X < c$.

Ile wynosi c ? Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 0.368
- (B) 0.505
- (C) 0.983
- (D) 0.975
- (E) 0.227

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 10 czerwca 2022r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	C	
2	B	
3	C	
4	D	
5	D	
6	A	
7	E	
8	D	
9	E ¹	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.

¹UWAGA: 14.02.2023 odpowiedź została zmieniona (wcześniej błędnie była podana odpowiedź (B))