

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2022r.

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i
majątkowych**

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Ryzyka X_1 i X_2 są niezależne i mają identyczny rozkład:

z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.7, \quad \text{i} \quad \Pr(X_1 = 1) = 0.1,$$

$$\text{oraz gęstością:} \quad f(x) = 0.4(1 - x) \quad \text{dla} \quad x \in (0, 1)$$

$\Pr(X_1 + X_2 > 1)$ wynosi:

(A) $\frac{16}{300}$

(B) $\frac{17}{300}$

(C) $\frac{18}{300}$

(D) $\frac{19}{300}$

(E) $\frac{20}{300}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1) , (λ_2, F_2) , oraz (λ_3, F_3) .

Wartości parametrów częstotliwości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3 , dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3/2	0	7/10	1
2	1	0	8/10	1
3	1/2	0	3/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

- (A) $\frac{19}{6}e^{-3}$
- (B) $\frac{17}{6}e^{-3}$
- (C) $\frac{15}{6}e^{-3}$
- (D) $\frac{13}{6}e^{-3}$
- (E) $\frac{11}{6}e^{-3}$

Zadanie 3.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$.

Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Likwidacja n -tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.

Założmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $\frac{1}{2}$.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t . Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $1 < t \leq 2$, a więc

$$E[N(2) - N(1)]$$

Wynosi:

- (A) 1.975
- (B) 1.957
- (C) 1.935
- (D) 1.910
- (E) 1.883

Zadanie 4.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q , zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q , zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Łąduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Łąduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_3 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczbie kierowców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.

Przyjmijmy, że parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_3 wynosi:

- (A) 10/55
- (B) 9/55
- (C) 8/55
- (D) 7/55
- (E) 6/55

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + \dots + l_N$, $(L = 0 \text{ gdy } N = 0)$,

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 3$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$E(N|L > u)$$

wynosi:

(A) 7

(B) $7\frac{1}{2}$

(C) 8

(D) $8\frac{1}{2}$

(E) 9

Zadanie 6.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem częstotliwości λ , niezależną od zmiennych Y_i . Niech:

$$M = \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(N|M)$ wynosi:

- (A) $\begin{cases} \lambda \cdot M & \text{gdy } M > 0 \\ 0 & \text{gdy } M = 0 \end{cases}$
- (B) $\begin{cases} 1 + \lambda \cdot M & \text{gdy } M > 0 \\ 0 & \text{gdy } M = 0 \end{cases}$
- (C) $1 + \lambda \cdot M$
- (D) $e^{\lambda \cdot M}$
- (E) $\begin{cases} e^{\lambda \cdot M} & \text{gdy } M > 0 \\ 0 & \text{gdy } M = 0 \end{cases}$

Zadanie 7.

W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u . Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Założmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ , oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\% \lambda \mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = E(L) + 1.645\sqrt{\text{var}(L)}$ wynosi:

- (A) 7.8%
- (B) 7.1%
- (C) 6.3%
- (D) 5.7%
- (E) 5.2%

Zadanie 8.

Liczby szkód $N_1, \dots, N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q , zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1 - q)$. Niech $N = N_1 + \dots + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0, 1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1 - x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\text{var}(N_{11} | N_1, \dots, N_{10}) > \text{var}(N_{11})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Zadanie 9.

W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami q , b oraz v , o następującym znaczeniu:

- parametr q to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą b i wariancję równą b^2v^2 .

Parametr v^2 dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą $1/5$.

Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów (q,b) losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych (Q,B) , o której wiemy, że:

- $E(Q) = 0.1$,
- $var(Q) = 0.01$,
- $var(B) = \frac{1}{4}[E(B)]^2$,
- zmienne Q i B są niezależne.

Niech W_n oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba n , dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{E(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

- (A) 1400
- (B) 1350
- (C) 1300
- (D) 1250
- (E) 1200

Zadanie 10.

Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W obu portfelach pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ . Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ . W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2 \exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{2}(1 + \theta)\lambda$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5 \exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{5}(1 + \theta)\lambda$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3} \exp(-u) + \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{5}{2}u\right), \quad u \geq 0,$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	E	
5	D	
6	B	
7	B	
8	C	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.