Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 17 października 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego N(0,1):

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

Przez premię za ryzyko rozumiemy poniżej oczekiwaną premię za ryzyko. Dysponujemy następującymi informacjami dla akcji spółki A (w ujęciu rocznym):

Współczynnik beta dla akcji spółki A	1.3
Premia za ryzyko dla portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	3 p.p.
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%
Odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji spółki A	8 p.p.
Odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	4 p.p.

a) Zapisz równanie opisujące stopę zwrotu z akcji zgodnie z modelem CAPM i wskaż komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (specyficznego dla akcji), które determinują stopę zwrotu – równanie ma opisywać losową stopę zwrotu i zawierać losowe komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (2p),
b) Wyznacz premię za ryzyko dla akcji spółki A zgodnie z modelem CAPM (1p),
c) Rozważmy n akcji, których stopy zwrotu modelowane są zgodnie z modelem CAPM z jednym systematycznym czynnikiem odpowiadającym za zmiany portfela rynkowego. Policz wariancję średniej stopy zwrotu z n akcji i pokaż, że ryzyko specyficzne dla akcji możemy zdywersyfikować w dużym portfelu, natomiast nie możemy zdywersyfikować ryzyka systematycznego (2p).

Odpowiedzi:

a) Równanie, stanowiące podstawę modelu CAPM, dla kluczowych zmiennych losowych jest postaci:

$$R_a = r_f + \beta * \left(R_m - r_f\right) + \varepsilon,$$

gdzie R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji, R_m – zmienną losową opisującą stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienną losową opisującą ryzyko systematyczne, ε – zmienną losową opisującą ryzyko niesystematyczne dla akcji. Zmienne (R_m, ε) nie są skorelowane.

b) Gdy policzymy wartość oczekiwaną zmiennej R_a, dostajemy:

$$E[R_a] - r_f = \beta * \left(E[R_m] - r_f\right).$$

Premia za ryzyko dla akcji wynosi więc 1.3*3=3.9 p.p.

c) Wyznaczamy:

$$Var\left(\frac{R_{a,1}+\cdots R_{a,n}}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(\varepsilon_i)}{n^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^2}{n^2} Var(R_m),$$

ponieważ $(\varepsilon_i)_{i=i,\dots,n}$ nie są skorelowane ze sobą. Przyjmując założenie: $Var(\varepsilon_i) \leq K$, dostajemy $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(\varepsilon_i)}{n^2} = 0$. Przyjmując założenie: $\beta_i \geq K > 0$, dostajemy $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^2}{n^2} Var(R_m) \geq K^2\, Var(R_m) > 0$. Co oznacza, że ryzyko systematyczne, mierzone wariancją, nie zanika w dużym portfelu i pozostaje niedywersyfikowalny komponent związany z R_m. Ryzyko niesystematyczne związane z $(\varepsilon_i)_{i=i,\dots,n}$ jest całkowicie dywersyfikowalne.

Akceptowalne było przyjęcie prostszych założeń: $Var(\varepsilon_i) = const$ i $\beta_i = const$.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 5.2 w *"Financial Markets Theory: Equilibrium, Efficiency and Information", 2nd edition - E. Barucci, C. Fontana, Springer, 2017.*

Zadanie 2.

Rozważmy 8-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu. Składka w wysokości 1 PLN wpłacana jest na fundusz w momencie t=0, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 6\%, b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 3% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy, jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę powiększoną o stopę zwrotu 4% rocznie. Prawdopodobieństwo śmiertelności wynosi 5% rocznie w całym okresie trwania ubezpieczenia, zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Ubezpieczyciel sprzedał 100 polis, o identycznych charakterystykach wskazanych powyżej, osobom o niezależnych dalszych trwaniach życia. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniom płatnym na koniec trwania umowy w wyniku dożycia. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w okresie rocznym. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka, obligacje wolne od ryzyka o dowolnym terminie zapadalności, fundusz i dowolne instrumenty pochodne oparte na funduszu. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Opisz ryzyko finansowe i ubezpieczeniowe, na które narażony jest ubezpieczyciel wystawiający powyższą gwarancję (2p),
b) Wyznacz wartość zobowiązania *best estimate* w reżimie Wypłacalność II (2p),
c) W oparciu o wartość zobowiązania z p. b) oceń czy opłata w wysokości 3% jest odpowiednia (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Odpowiedzi:

a) Ubezpieczyciel narażony jest na ryzyko finansowe związane ze spadkiem ceny funduszu i ryzyko ubezpieczeniowe związane z większą przeżywalnością ubezpieczonych. W obu przypadkach ubezpieczyciel narażony jest na zwiększenie wartości zobowiązania.

b) Załóżmy, że *S(0)=1.* Wtedy *S(T)* opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku *F* w momencie *T* dana jest wzorem:

$$F(T) = F(0) * S(T) * (1-p)^T, \quad F(0) = Składka,$$

gdzie *p* oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Niech *N(T)* oznacza liczbę ubezpieczonych dożywających końca trwania umowy. Zobowiązanie na moment *T* ma postać:

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{N(T)} * \max(F(T), F(0) * (1+g)^T) \\ &= \mathrm{N(T)} * \max(F(0) * (1+g)^T - F(0) * S(T) * (1-p)^T, 0) \\ &\quad + N(T) * F(0) * S(T) * (1-p)^T \\ &= N(T) * (1-p)^T * F(0) * \max\left(\frac{(1+g)^T}{(1-p)^T} - S(T), 0\right) + N(T) * F(T), \end{aligned}$$

gdzie *g* – gwarantowana stopa zwrotu. Zakładamy, że ryzyko śmiertelności jest w pełni dywersyfikowalne, co oznacza, że wyznaczając wartość zobowiązania *best estimate* możemy zastąpić *N(T)* przy pomocy *n(t)* – oczekiwanej liczby osób dożywających końca trwania umowy. Przepływ pieniężny z zobowiązania na koniec trwania umowy można zreplikować przy pomocy *n(t)* jednostek wartości rachunku i $n(t) * (1-p)^T$ jednostek opcji put wystawionej na fundusz *S* z ceną wykonania $\frac{1}{(1-p)^T}$ i terminem wykonania *T*.

c) Wyznaczamy wartość zobowiązania na moment *t*=0. Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach:

$$r = \log(1+3\%), \sigma = 0.15, T = 8, K = \frac{(1+4\%)^8}{(1-3\%)^8}, S(0) = 1,$$

jest równa 0.4422. Wartość jednostki rachunku wynosi $(1-3\%)^8$=0.7837, ponieważ cena *S(T)* jest równa *S(0)=1.* Wartość zobowiązania jest równa $100 * (1-5\%)^8 * (1-8\%)^8 * 0.4422 + 100 * (1-5\%)^8 * 0.7837 = 74.9890$.

d) Ponieważ wartość zobowiązania z pojedynczej polisy jest mniejsza od zebranej składki (0.74989<1), ppłata w wysokości 3% pokrywa wystawioną gwarancję.

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdziały 18.2 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.*

Zadanie 3.

a) Scharakteryzuj cztery rodzaje ryzyka w ubezpieczeniach majątkowych związane z poziomem szkód (level), zmiennością (volatility), trendem (trend) i zdarzeniami katastroficznymi (catastrophe) (4p),
b) Posiadamy następujące informacje:

Rok szkodowy	Składka zarobiona	Zagregowane szkody z roku szkodowego
2020	100	70
2021	150	120
2022	300	260

Ocenić ryzyko trendu we współczynnikach szkodowości (1p).

Odpowiedzi:

a) W oparciu np. o rozdział 7.9 w "*Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017.*

b) Liczymy współczynniki szkodowości w kolejnych latach szkodowych: 70/100*100%=70%, 120/150*100%=80%, 260/300*100%=86%. Obserwujemy wzrost współczynnika szkodowości, co może stanowić podstawę do stwierdzenia, że jesteśmy narażeni na ryzyko trendu.

Zadanie 4.

Rozważmy rozkład Pareto straty *X* postaci:

$$F(x) = 1 - x^{-c}, x > 1,$$

z parametrem *c=1.5.*

a) Wyznacz kapitał ekonomiczny dla nieoczekiwanej straty, tzn. dla zmiennej $X - E[X]$, stosując miarę Value-at-Risk $VaR_p\big[X - E[X]\big]$ na poziomie ufności 75% (2p),
b) Wyznacz kapitał ekonomiczny dla nieoczekiwanej straty, tzn. dla zmiennej $X - E[X]$, stosując miarę Conditional Tail Expectation $E[X - E[X]|X > VaR_p[X]]$ na poziomie ufności 75% (2p),
c) Oceń wyniki, który otrzymałeś w punktach a) i b). Uzasadnij, którą miarę ryzyka wykorzystałbyś do wyznaczenia kapitału ekonomicznego (1p).

Wskazówka: Możesz przyjąć bez obliczeń, że $E[X] = \frac{c}{c-1}$.

Odpowiedzi:

a) Niech $L = X - E[X]$. Wyznaczamy kwantyle dla zmiennych X i L oraz kapitał ekonomiczny dla L:

$$F_X^{-1}(p) = (1-p)^{-\frac{1}{c}},$$

$$F_L^{-1}(p) = VaR_p(L) = (1-p)^{-\frac{1}{c}} - \frac{c}{c-1} = -0.4802.$$

b) Wyznaczamy warunkowe wartości oczekiwane dla zmiennych X i L oraz kapitał ekonomiczny dla L:

$$E[X|X > u] = \frac{c}{\Pr(X > u) * (c-1)} u^{1-c},$$

$$E\big[X - E[X]\big|X > VaR_p(X)\big] = CTE_p(L) = \frac{\frac{c}{c-1}u^{1-c}}{1-p} - \frac{c}{c-1} = 4.5595,$$

gdzie podstawiliśmy $u = F_X^{-1}(p) = 2.5198$.

c) Ponieważ rozkład Pareto z parametrem c=1.5 jest rozkładem skośnym i gruboogonowym kwantyl niższego rzędu jest mniejszy niż wartość oczekiwana i miara ryzyka VaR dla nieoczekiwanej straty zwraca ujemny kapitał ekonomiczny, który nie jest do zaakceptowania w kontekście ryzyka, na które jesteśmy narażeni. Wybrać należy miarę CTE do wyznaczenia kapitału ekonomicznego w tym przykładzie.

Przykładowa literatura: Rozdział 2.3 *w "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 5.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 300 i 600, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 200 i 400, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (2p),
b) Wykorzystując ogólną definicję alokacji Eulera, wyznacz i przeprowadź alokację zdywersyfikowanego kapitału do poziomu ryzyka składki w segmencie 1 (3p).

Odpowiedzi:

a) Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$SCR_1 = 3 * \sqrt{(300 * 0.1)^2 + (200 * 0.09)^2 + 2 * 300 * 0.1 * 200 * 0.09 * 0.5} = 126.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$SCR_2 = 3 * \sqrt{(600 * 0.08)^2 + (400 * 0.1)^2 + 2 * 600 * 0.08 * 400 * 0.1 * 0.5} = 228.95.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$SCR = \sqrt{(126)^2 + (228.95)^2 + 2 * 126 * 228.95 * 0.25} = 287.60.$$

Alternatywnie, zamiast 3 można było użyć wartości 2.57 (kwantyl rzędu 99.5% w rozkładzie normalnym).

b) Niech *h* oznacza dodatkową ekspozycję dla ryzyka składki w segmencie I. Wyznaczmy miary ryzyka zgodnie z agregacją hierarchiczną:

$$SCR(h) = \sqrt{(SCR_1(h))^2 + (SCR_2)^2 + 2 * SCR_1(h) * SCR_2 * rho_{1,2}},$$

$$SCR_1(h) = \sqrt{\left(SCR_{1,s}(h)\right)^2 + \left(SCR_{1,r}\right)^2 + 2 * SCR_{1,s}(h) * SCR_{1,r} * rho_{r,s}},$$

$$SCR_{1,s}(h) = 3 * E_{1,s} * (1 + h) * \sigma_{1,s}.$$

Alokację Eulera wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$SCR\left(L_{1,s}\middle|L\right) = \frac{d}{dh} SCR(h)|_{h=0}.$$

Dostajemy:

$$SCR\left(L_{1,s}\middle|L\right) = \frac{SCR_1 + SCR_2 * rho_{1,2}}{SCR} * \frac{\left(SCR_{1,s}\right)^2 + SCR_{1,s} * SCR_{1,r} rho_{r,s}}{SCR_1}$$
$$= \frac{126 + 228.95 * 0.25}{287.60} * \frac{(3 * 300 * 0.1)^2 + (3 * 300 * 0.1) * (3 * 200 * 0.09) * 0.5}{126} = 53.25.$$

Wykorzystaliśmy $SCR_1 = SCR_1(0)$.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.5 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 6.

Rozważamy model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego (pewnego) roku szkodowego. Stosujemy model Hertiga rozwoju szkód, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych *i,* opisane są wzorem: $C_0 = 50$, $C_i = C_{i-1} * e^{X_i}$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1 (najbliższy rok kalendarzowy)	0.6	0.3
2	0,5	0.15
3	0.1	0.05

Wartość C_0 opisuje wartość świadczeń już wypłaconych przez ubezpieczyciela w poprzednich latach kalendarzowych. Podane oszacowania $(\mu_i, \sigma_i\ )$ są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie uwzględniamy błędów estymacji tychże parametrów w ocenie ryzyka rezerw. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w poniższych obliczeniach.

a) Zapisz straty ubezpieczyciela w horyzoncie jednorocznym i ostatecznym wykorzystując odpowiednie wyrażenia matematyczne, gdzie strata rozumiana jest jako zmiana wartości zobowiązań ubezpieczeniowych *best estimate* z tytułu szkód niewypłaconych z analizowanego roku szkodowego – wyjaśnij poszczególne komponenty zapisanej straty (3p),
b) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w reżimie Wypłacalność II stosując odpowiednią definicję straty i miarę Value-at-Risk (2p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak+\frac{1}{2}b^2k^2}$.

Odpowiedzi:

a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako:

$$L_{1YR} = E[C_n|C_1] - E[C_n|C_0].$$

Stratę w horyzoncie ostatecznym definiujemy jako:

$$L_{ULT} = E[C_n|C_n] - E[C_n|C_0] = C_n - E[C_n|C_0].$$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowania zobowiązania z tytułu szkód niewypłaconych pod warunkiem informacji w danym momencie czasu. Dodatkowo, wiemy:

$$C_n = C_0 * \exp(\textstyle\sum_{i=1}^3 X_i) = 50 * \exp(\textstyle\sum_{i=1}^3 X_i),$$
$$E[C_n|C_0] = C_0 * \exp\left(\sum_{i=1}^3 \mu_i + 0.5 * \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2\right) = 175.83,$$

$$E[C_n|C_1] = C_0 * e^{X_1} * \exp\left(\sum_{i=2}^{3} \mu_i + 0.5 * \sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right) = 92.26 * e^{X_1}.$$

b) Wyznaczamy

$$VaR_{99.5\%}(L_{1YR}) = (92.26 * e^{0.6+0.3*2.57}\text{-}175.83)\text{=}187.58.$$

<u>Przykładowa literatura:</u> *“Claims run-off uncertainty: the full picture” - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015.*

Zadanie 7.

Rozważamy model Mertona dla ryzyka kredytowego. Firmy A i B finansują swoją działalność emisją akcji i obligacji zero-kuponowych z terminem wykupu *T*. Zmiany wartości aktywów firmy A i B opisane są równaniami:

$$dV(t) = a_i V(t)dt + b_i V(t)dW_i(t), \quad i = A, B,$$

gdzie W_1, W_2 są ruchami Browna. Zapadalność długu następuje w ciągu najbliższego roku w chwili *T=1*. Stopa wolna od ryzyka (intensywność oprocentowania) wynosi 5% w ciągu całego najbliższego roku. Dodatkowo:

Firma *i*	A	B
Bieżąca wartość aktywów firmy *V(0)*	100 PLN	300 PLN
A	5%	2%
B	25%	20%
Nominalna wartość długu w momencie *T=1*	50 PLN	200 PLN

a) Wyprowadź rzeczywiste prawdopodobieństwo *defaultu* i wyznacz prawdopodobieństwa *defaultu* dla firmy A i B w ciągu roku (3p),
b) Wyznacz rzeczywiste prawdopodobieństwo, że obie firmy zbankrutują w ciągu roku, przy założeniu, że scenariusze bankructwa dla firmy A i B są zależne i zależność opisana jest kopułą Gumbela:

$$C(u,v) = \exp\{-((-\ln(u))^a + (-\ln(v))^a)^{1/a}\},$$

z parametrem $a = 2$, co odpowiada wsp. Kendalla na poziomie 50% (2p).

Wskazówka: Rozwiązaniem stochastycznego równania opisującego aktywa jest proces $V(t) = V(0)e^{at-0.5*b^2t+bW(t)}$ i wiemy $W(t) \sim N(0,t)$.

Odpowiedzi:

a) Zgodnie z modelem Mertona, prawdopodobieństwo *defaultu* w okresie *[0,T]* wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$Pr(V(T) < K) = \Pr\left(V(0)e^{aT-\frac{1}{2}b^2T+bW(T)} < K\right)$$
$$= \Pr\left(W(T) < \frac{\log\left(\frac{K}{V(0)}\right) - aT + \frac{1}{2}b^2T}{b}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{K}{V(0)}\right) - aT + \frac{1}{2}b^2T}{b\sqrt{T}}\right),$$

gdzie K oznacza nominalną wartość długu w momencie T i Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Podstawiając wartości parametrów dla firmy A - otrzymujemy prawdopodobieństwo 0.22%. Dla firmy B – 2.13%.

b) Niech:

$$I_i = \begin{cases} 1, & firma\ i\ zbankrutuje \\ 0, & firma\ i\ nie\ zbankrutuje \end{cases} \text{Wpisz tutaj równanie.}$$

Wyznaczamy prawdopodobieństwa:

$$\Pr(I_A = 0, I_B = 0) = C(1 - 0.22\%, 1 - 2.13\%) = 0.9785,$$
$$\Pr(I_A = 1) = 0.0022,$$
$$\Pr(I_B = 1) = 0.0213,$$
$$\Pr(I_A = 1, I_B = 1) = 1 - \Pr(I_A = 0) - \Pr(I_B = 0) + \Pr(I_A = 0, I_B = 0)$$
$$= 0.21\%.$$

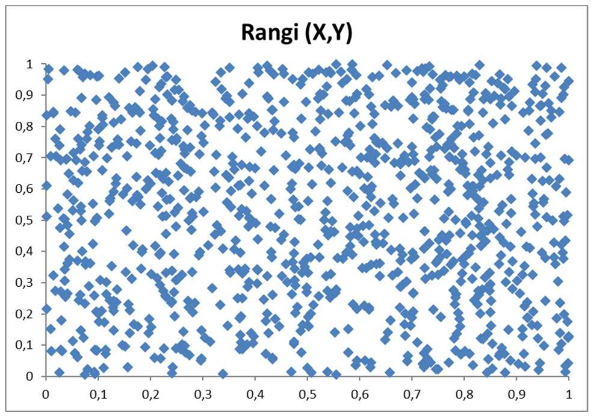
Prawdopodobieństwo, że obie firmy zbankrutują w ciągu roku, przy założeniu, że scenariusze bankructwa dla firmy A i B są zależne i zależność opisana jest kopułą Gumbella wynosi 0.21% (zauważ, że kopuła Gumbela posiada zależność w górnym prawym rogu, czyli powinniśmy wybrać $(I_A = 1, I_B = 1)$ jako scenariusz łącznego *defaultu* w prawym górnym rogu).

<u>Przykładowa literatura:</u> Rozdział 14.5.3 w *"Financial Enterprise Risk Management", 2nd edition - P. Sweeting, Cambridge, 2017; oraz* Rozdział 7 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 8.

Rozważamy kwestię modelowania zależności pomiędzy dwoma czynnikami ryzyka (X, Y) na potrzeby wprowadzenia modelu wewnętrznego do wyznaczenia kapitału ekonomicznego w celu pokrycia straty generowanej przez te czynniki.

a) Zdefiniuj współczynnik zależności w górnym prawym ogonie dla (X, Y) i opisz jego rolę w kontekście zarządzania ryzykiem (2p),
b) Dysponujemy następującym wykresem rang obserwacji dla czynników (X, Y):



Oceń czy zmienne (X, Y) charakteryzują się zależnością w górnym prawym ogonie (1p),
c) Rozważmy portfel obligacji korporacyjnych narażonych na ryzyko kredytowe. Uzasadnij, czy proponowałbyś model zależności w ogonie, czy też braku zależności, do modelowania i mierzenia straty z tego portfela (2p).

Odpowiedzi:

a) Współczynnik zależności w górnym prawym ogonie dla (X, Y) definiujemy zgodnie ze wzorem:

$$\lim_{q \to 1^-} \Pr\left(X > F_X^{-1}(q) \mid Y > F_Y^{-1}(q)\right).$$

Współczynnik zależności w ogonie mówi o możliwości wystąpienia zdarzenia, w którym ekstremalna szkoda z czynnika Y pociągnie za sobą ekstremalną szkodę z czynnika X.

b) Brak zależności w górnym prawym ogonie ponieważ punkty (rangi) równomiernie wypełniają górny prawy róg kwadratu.

c) Spodziewamy się zależności w górnym prawym ogonie ponieważ spodziewamy się strat ze wszystkich obligacji w scenariuszu kryzysu ekonomicznego (finansowego), w którym upadek jednej instytucji pociąga za sobą upadek innych instytucji emitujących obligacje.

Przykładowa literatura: Rozdział 7 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie w wysokości 200 i 300 w terminach zapadalności równych 5 i 9 lat. Struktura terminowa stóp procentowych wyznaczona jest w oparciu o trzy stopy w terminach zapadalności 1 miesiąc, 3 i 7 lat w wysokości, odpowiednio, 2%, 4% i 8%. Stopy w pozostałych terminach zapadalności, pomiędzy 3 i 7 lat, definiowane są poprzez liniową aproksymację stóp z terminów zapadalności 3 i 7 lat. Struktura terminowa stóp w terminach zapadalności powyżej 7 lat jest natomiast płaska. Przyjmujemy, że stopy są stopami spot oprocentowania ciągłego. Zmiany stóp w terminach 3 i 7 lat w okresie tygodnia modelowane są przy pomocy łącznego rozkładu normalnego:

$$N(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\left(\frac{0.5}{100}\right)^2 & \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.25\\ \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.25 & \left(\frac{1}{100}\right)^2\end{bmatrix}).$$

Poniżej zaniedbujemy zmiany wartości zobowiązania związane ze skróceniem terminu zapadalności.

a) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu wyznacz zmianę wartości zobowiązania w wyniku spadku stóp procentowych w ciągu tygodnia w terminach 3 i 7 lat o 1 i 2 punkty procentowych (2p),
b) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu, wyznacz ryzyko zmiany wartości zobowiązania w horyzoncie jednego tygodnia związane ze zmianą wartości zobowiązania w wyniku zmian stóp procentowych. Jako miarę ryzyka zastosuj miarę Conditional Tail Expectation na poziomie 95% (3p).

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(a, b^2)$, wtedy $CTE_p(X) = a + b\frac{f(F^{-1}(p))}{1-p}$, gdzie f i F są gęstością i dystrybuantą rozkłady $N(0,1)$, w szczególności:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Odpowiedzi:

a) Stopę dla terminu zapadalności *t=5* wyznaczamy jako:

$$r_5 = a * r_3 + (1 - a)r_7,$$

gdzie r_3 i r_7 oznaczają stopy w terminach 3 i 7 lat i $a = 1/2$. Stopę dla terminu zapadalności *t=9* wyznaczamy jako:

$$r_9 = r_7.$$

Wartość zobowiązania dana jest wzorem:

$$P(r_3, r_7) = 200 * e^{-5*r_5} + 300 * e^{-9*r_9} = 200 * e^{-\frac{5}{2}*(r_3+r_7)} + 300 * e^{-9*r_7} = A(r_3, r_7) + B(r_7).$$

Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu i podstawiając $h_3 = -\frac{1}{100}$ $h_7 = -\frac{2}{100}$, dostajemy:

$$\begin{aligned} P(r_3 + h_3, r_7 + h_7) - P(r_3, r_7) &= P_{r_3}(r_3, r_7) * h_3 + P_{r_7}(r_3, r_7) * h_7 \\ &= A_{r_3}(r_3, r_7) * h_3 + \left(A_{r_7}(r_3, r_7) + B_{r_7}(r_7)\right) * h_7 \\ &= -\frac{5}{2} * 148.16 * h_3 + (-\frac{5}{2} * 148.16 - 9 * 146.02) * h_7 \\ &= 37.39. \end{aligned}$$

b) Przyjmując założenie o łącznym rozkładzie normalnym dla tygodniowej zmiany stóp procentowych (h_3, h_7) dostajemy rozkład:

$$P(r_3 + h_3, r_7 + h_7) - P(r_3, r_7) \sim N(0, 17.40^2).$$

Wyznaczamy miarę ryzyka zgodnie ze wzorem:

$$CTE_p(X) = 17.40 * \frac{f\left(F^{-1}(0.95)\right)}{1 - 0.95} = 35.89.$$

Przykładowa literatura: Rozdział 20.3 w *"Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management" - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019; oraz* Rozdział 6.1 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.*

Zadanie 10.

Jako początkową datę wyceny pozycji w bilansie rozważamy początek roku kalendarzowego 2022. Firma ubezpieczeniowa posiada jednoroczne zobowiązanie. Świadczenia są płatne pod koniec roku kalendarzowego i pochodzą z rozkładu log-normalnego o wartości oczekiwanej 2,000 i odchyleniu 1,000. Wartość najlepszego oszacowania zobowiązania *best estimate* wyznaczamy jako zdyskontowaną wartość przyszłych świadczeń, gdzie do dyskontowania wykorzystujemy stopę wolną od ryzyka dla odpowiedniego terminu zapadalności zobowiązania. Dodatkowo, wartość marginesu ryzyka dla zobowiązania na początku roku kalendarzowego jest zadana i wynosi 500. Firma posiada aktywa w wysokości 5,000. Aktywa zostały zainwestowane w 50% w 1-roczną zero-kuponową obligację i w 30% w 2-letnią zero-kuponową obligację rządową, bez ryzyka kredytowego, o rocznej stopie rentowności równej 5% oraz w 20% w akcje. Instrumenty finansowe wyceniane są zgodnie z wartościami rynkowymi, na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i obligacje są płynnie handlowane na rynku finansowym.

a) Wyznacz wartość środków własnych w reżimie Wypłacalność II na początku roku kalendarzowego (1p),
b) Wyznacz wartość środków własnych w reżimie Wypłacalność II na koniec roku kalendarzowego, po wypłaceniu świadczeń, przy scenariuszu: wzrostu stopy rentowności z obligacji do poziomu 6% (nadal zakładamy płaską strukturę terminową po zmianie stopy rentowności na koniec 2022r.), spadku ceny akcji o 25%, wysokości świadczeń na poziomie kwantyla 95% rozkładu prawdopodobieństwa (3p),
c) Załóżmy, że powyższy scenariusz definiuje zmianę środków własnych na potrzeby wyznaczenia wymaganego kapitału ekonomicznego. Wyznacz wartość tego kapitału (1p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak+\frac{1}{2}b^2k^2}$.

Odpowiedzi:

a) Wartość zobowiązania wynosi $\frac{2{,}000}{1+5\%} + 500 = 2{,}404.76$. Wartość środków własnych wynosi 5,000-2,404.76=2,595.24.

b) Stosując metodę momentów możemy wyznaczyć parametry a i b w rozkładzie log-normalnym opisującym losowe świadczenie w chwili t=1. Dostajemy: a=7.4893 i b=0.4724 Wartość zobowiązania w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi $e^{7.4893+\ \ .6449*0.4724} = 3{,}890.64$.

Wartość akcji w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi 20%*5,000*(1-15%)=750. Wartość obligacji w zadanym scenariuszu na moment t=1 wynosi:

$$50\% * 5{,}000 * (1 + 5\%) + 30\% * 5{,}000 * \frac{(1 + 5\%)^2}{1 + 6\%} = 4{,}185.14.$$

Wysokość środków własnych na moment t=1 w zadanym scenariuszy wynosi 4,185.14+750-3,890.64=1,044.51.

c) Zmiana środków własnych w zadanym scenariuszu wynosi 2,595.24-1,044.51=1,550.73, co odpowiada kwocie kapitału ekonomicznego zgodnie z definicją w zadaniu.

Przykładowa literatura: Rozdziały 2.1-2.3 w *"Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015;* oraz Rozdział 3.5.6 w *"Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016.*

Sesja egzaminacyjna w dniu 17 października 2023 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	