**RAFAŁ BUŁA**

IMPLIKACJE TEORII RYNKU FRAKTALNEGO DLA OCENY RYZYKA INWESTYCJI FINANSOWYCH

Rafał Buła



Implikacje teorii
rynku fraktalnego
dla oceny ryzyka inwestycji
finansowych

Warszawa 2019

Monografia stanowi skróconą wersję rozprawy doktorskiej pt. „Implikacje teorii rynku fraktalnego dla oceny ryzyka inwestycji finansowych”, za którą Autorowi przyznano Nagrodę Przewodniczącego Komisji Nadzoru Finansowego za najlepszą pracę doktorską z zakresu rynku finansowego w VI edycji ww. Konkursu.

Recenzent: dr hab. Krystian Pera, prof. UE

Publikacja została wydana nakładem Urzędu Komisji Nadzoru Finansowego

© Urząd Komisji Nadzoru Finansowego
ul. Piękna 20
00-549 Warszawa
www.knf.gov.pl

Warszawa 2019

ISBN 978-83-66322-02-8
Nakład: 50 szt.

Przygotowanie do druku i druk: Pracownia C&C Sp. z o.o.

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział I. Matematyczne podstawy geometrii fraktalnej	9
1.1. Powstanie geometrii fraktalnej	10
1.2. Pojęcie wymiaru w geometrii fraktalnej	23
1.2.1. Wymiar topologiczny	24
1.2.2. Wymiar Hausdorffa	25
1.2.3. Wymiar pudełkowy	27
1.2.4. Wymiar cyrkłowy	29
1.2.5. Wymiar samopodobieństwa	30
1.2.6. Podsumowanie	31
1.3. Krytyczna analiza współczesnych definicji obiektu fraktalnego	33
1.4. Konkluzje	38
Rozdział II. Znaczenie i przydatność teorii rynku fraktalnego dla pomiaru ryzyka inwestycji finansowych	39
2.1. Teoria rynku fraktalnego – istota i znaczenie dla pomiaru ryzyka inwestycji finansowych	39
2.1.1. Krytyczna analiza współzależności pomiędzy teorią rynku fraktalnego a teorią chaosu deterministycznego	40
2.1.2. Pojęcie fraktala w teorii rynku fraktalnego	41
2.1.3. Samopodobieństwo jako kluczowe pojęcie określające teorię rynku fraktalnego	42
2.1.4. Ekonomiczna istota teorii rynku fraktalnego	46
2.1.5. Pojęcie losowości w teorii rynku fraktalnego	52
2.1.6. Rozkłady α -stabilne w teorii rynku fraktalnego	55
2.1.7. Ułamkowy ruch Browna w teorii rynku fraktalnego	61
2.2. Problemy pomiaru ryzyka inwestycji na fraktalnym rynku finansowym	67
2.2.1. Wymiar fraktalny jako proponowana miara ryzyka inwestycji finansowych	69
2.2.2. Autorskie podejście do oceny ryzyka inwestycji finansowych w oparciu o wymiar fraktalny	74
2.3. Konkluzje	79

Rozdział III. Metodyka estymacji wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych	81
3.1. Metoda pudełkowa	81
3.2. Metoda segmentowo-wariacyjna	84
3.3. Metoda podziału pola	87
3.4. Krytyczna analiza użyteczności metody segmentowo-wariacyjnej i podziału pola w szacowaniu wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych	93
3.5. Konkluzje	95
Rozdział IV. Pomiar ryzyka inwestycji finansowych z wykorzystaniem wymiaru fraktalnego – badania empiryczne	96
4.1. Charakterystyka przedmiotu badań	97
4.2. Procedura i wyniki badań	105
4.2.1. Analiza wybranych podstawowych własności statystycznych	105
4.2.2. Analiza wymiaru fraktalnego w świetle przynależności do indeksu giełdowego	108
4.2.3. Analiza zależności pomiędzy klasycznymi miarami ryzyka i wymiarem fraktalnym	112
4.2.4. Analiza zależności pomiędzy odchyleniem standardowym a długością horyzontu inwestycyjnego	116
4.2.5. Analiza porównawcza dla szeregów czasowych o losowo wymieszanych obserwacjach	118
4.2.6. Analiza zależności pomiędzy odchyleniem standardowym, długością horyzontu inwestycyjnego a wymiarem fraktalnym	122
4.2.7. Prezentacja zależności pomiędzy krótko- i długoterminową zmiennością stóp zwrotu z akcji a wymiarem fraktalnym na przykładzie spółek Orange Polska SA oraz Wawel SA	125
4.3. Dyskusja wyników i konkluzje	126
Zakończenie	129
Literatura	132
Spis rysunków	140
Spis tabel	143

Godna tej nazwy nauka nie może istnieć bez dokładnych określeń i udowodnień. Zaniedbanie potrzebnej ścisłości w wypowiedzianiu twierdzeń było głównym powodem, dla którego ekonomja klasyczna tak łatwo padła pod ciosami przeciwników. To też wszelki postęp w tym kierunku musi być z radością witany przez tych, którzy życzą, żeby ekonomja była czemś więcej, niż zbiorem wiadomości bez wewnętrznego między niemi związku.

W. Zawadzki

Podejmowanie decyzji ekonomicznych wiążących się z uczestnictwem podmiotów gospodarujących w transakcjach rynku finansowego cieszy się niegasnącym zainteresowaniem ekonomistów. W chwili obecnej ta problematyka jest przedmiotem wieloaspektowych analiz poświęconych rozmaitym ujęciom wskazanych zagadnień. Spośród wielu problemów cząstkowych do najstarszych – i wydawałoby się stosunkowo mało skomplikowanych – należy kwestia oceny finansowych skutków wspomnianych decyzji, uwzględniającej osiągnięte dochody oraz ryzyko ponoszone przez inwestora. Relatywnie mniej wątpliwości budzi zagadnienie oceny dochodowości dokonywanych inwestycji. Wypracowane dotychczas metody pozwalają na dokonanie takiej oceny zarówno w ujęciu względnym, jak i bezwzględnym w wielu sytuacjach, nie budząc większych kontrowersji wśród uczonych i praktyków, choć nie wszystkie problemy z nią związane zostały zapewne dotychczas uświadomione i rozwiązane. Tym niemniej zainteresowanie ową kwestią jest daleko mniejsze.

Z całkowicie odmiennym stanem rzeczy spotykamy się w przypadku oceny ryzykowności inwestycji. Znamienny jest fakt, że o ile terminami dochodu i stopy zwrotu posługiwano się przed wieloma wiekami, o tyle pojęcie ryzyka pojawiło się w ubiegłym stuleciu. Jakkolwiek stopniowo (choć nie bez trudu) rozwijano jakościowe i ilościowe metody oceny ryzykowności inwestycji, to ich upowszechnienie nastąpiło dopiero w ostatnim półwieczu. Początkowo rozwiązania omawianego problemu upatrywano w wykorzystaniu wariancji i odchylenia standardowego oraz miar pokrewnych – które to ujęcie stało się powszechne w drugiej połowie XX wieku, przyczyniając się do powstania wielu doniosłych koncepcji współczesnej teorii finansów (jak np. model wyceny aktywów kapitałowych Treynora-Sharpe’a-Lintnera-Mossina). Użyteczność oraz płodność naukowa tego podejścia przesłoniły fakt (bądź skłoniły do uznania za relatywnie nieistotny), że nagromadzone dane empiryczne skłaniają do podania w wątpliwość fundamentalnych założeń tkwiących u podstaw wykorzystania tych miar. W tej sytuacji popularyzacja wspomnianej metodyki oceny ryzyka inwestycyjnego wśród podmiotów rynku finansowego paradoksalnie prowadziła, zdaniem

autora, do powstania dodatkowych zagrożeń, albowiem „(...) człowiek, który błądzi, błądzi podwójnie, bo nie zna właściwej odpowiedzi i nie wie, że jej nie zna. Niewiedza tego drugiego rodzaju jest szczególnie niebezpieczna (...)”¹. Nadmierne zaufanie pokładane w samej metodzie, miernikach oraz rezultatach dokonywanych ocen w warunkach niedostatecznej adekwatności przesłanek jej stosowania można uznać za jeden z czynników przyczyniających się do wystąpienia wielu turbulencji na rynkach finansowych w ostatnich dekadach.

Dotychczasowe doświadczenia wskazują jednoznacznie na konieczność modyfikacji wykorzystywanych metod pomiaru ryzyka inwestycji finansowych bądź opracowania nowych, które umożliwiłyby istotnie lepsze aproksymowanie rzeczywistych fluktuacji cen. Starania takie są czynione w środowisku naukowym, owocując pokaźną liczbą stworzonych modeli, mających uwzględniać wszelakie zależności pomiędzy różnymi zmiennymi opisującymi poszczególne instrumenty finansowe. W tej liczności (pozornie pozytywnej) autor upatruje jednak przyczyny sprawiającej, że większość z nich najprawdopodobniej nigdy nie zyska uznania, jakim cieszyło się (i częściowo nadal cieszy się) podejście oparte na klasycznych miernikach ryzyka. Wspomniane modele wydają się powstawać wskutek czynionych *ad hoc* poprawek, mających ratować dotychczasowy paradygmat przed ostatecznym odesłaniem go do lamusa teorii ekonomii. Ich porażka wydaje się więc nieunikniona.

Istnieje tymczasem nowe podejście, zyskujące sobie stopniowo zwolenników, opierające się na wykorzystaniu w ocenie ryzyka inwestycyjnego koncepcji matematycznej określanej mianem geometrii fraktalnej. Wydaje się, że te idee, nazwane teorią rynku fraktalnego, umożliwiają wypracowanie bardziej adekwatnej metodyki kwantyfikacji ryzyka. Dlatego też **przedmiotem badań** zaprezentowanych w niniejszej monografii autor uczynił **teorię ryzyka inwestycji finansowych z uwzględnieniem implikacji dla oceny poziomu tego ryzyka niesionych przez teorię rynku fraktalnego**. W szczególności pogłębionym analizom poddano pojęcie wymiaru fraktalnego jako potencjalnego miernika ryzyka oraz zasadność jego wykorzystania w procesie kwantyfikacji ryzyka inwestycyjnego.

Zasadniczym celem autora jest dokonanie oceny przydatności wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka inwestycji finansowych. Autor jest głęboko przekonany, że dotychczasowe instrumentarium pomiaru ryzyka nie jest zdolne uchwycić w zadowalający sposób skali turbulentności współczesnych rynków finansowych, prowadząc nieuchronnie do zaniżania w istotny sposób jego poziomu. Zjawisko to jest niepokojące, jako że w sytuacji powszechnego wykorzystywania wspomnianych metod, przy niezachwianej wierze w ich skuteczność, może ono prowadzić do niekorzystnej z punktu widzenia ogólnogospodarczego alokacji zasobów, przyczyniając się zarazem do nieuzasadnionej redystrybucji dochodów.

Osiągnięcie celu głównego jest determinowane zrealizowaniem wyznaczonych celów częściowych. Pierwszym celem częściowym jest określenie na gruncie teoretycznym przydatności wybranych, uznanych za najistotniejsze, miar fraktalnych jako charakterystyk badanych finansowych szeregów czasowych. Należy bowiem dążyć do wyeliminowania bezkrytycznego posilkowania się miernikami uznanymi za użyteczne w innych dyscyplinach, których wykorzystanie już na mocy ich apriorycznych własności można przyjąć za bezzasadne.

Rozpoznanie walorów i niedostatków wspomnianych mierników fraktalnych jest jednak niewystarczające, jako że ze względu na ich stosowanie do analizowania danych empirycznych konieczne jest posłużenie się określonymi metodami estymacji. Ponieważ sposób szacowania istotnie oddziałuje na otrzymanywane rezultaty – a w szczególności ich dokładność i stabilność – celowe jest dokonanie oceny przydatności wybranych metod kalkulowania wymiaru fraktalnego finansowych

¹ E. Borel: *Prawdopodobieństwo i pewność*. PWN, Warszawa 1963, s. 112.

szeregów czasowych, by przekonać się, czy posiłkowanie się poszczególnymi estymatorami jest zasadne, a także jakie są ich podstawowe własności.

Kolejnym celem zakreślonym przez autora jest ocena i porównanie zawartości informacyjnej klasycznych miar ryzyka oraz wymiaru fraktalnego z wykorzystaniem badanych finansowych szeregów czasowych.

Za ostatni cel uznano dokonanie oceny zależności wiążącej wymiar fraktalny oraz poziom ryzyka inwestycyjnego (w sensie zmienności) w warunkach zróżnicowanej długości rozpatrywanego horyzontu inwestycyjnego. Istniejące w literaturze przedmiotu ujęcie tego kluczowego dla oceny użyteczności wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka problemu jest bowiem, zdaniem autora, niesatysfakcjonujące czy wręcz mylące, jako że wpływ długości horyzontu inwestycyjnego jest całkowicie pomijany. Tymczasem, jak wykazano w niniejszej monografii, ma on decydujące znaczenie dla poprawnej interpretacji wymiaru fraktalnego i określenia poziomu ryzyka inwestycyjnego. Uznając wskazane zagadnienie za kluczowe dla oceny przydatności wymiaru fraktalnego w procesie kwantyfikacji ryzyka, autor zdecydował o uczynieniu go przedmiotem pogłębionej analizy krytycznej.

Dążąc do realizacji przedstawionych celów badawczych, autor stanął przed koniecznością zajęcia określonego stanowiska metodologicznego determinującego jego dalsze postępowanie. Mając świadomość panującej różnorodności poglądów w tym zakresie, zwłaszcza w naukach ekonomicznych, przyjęto jednak jednoznacznie pogląd natury epistemologicznej, że słuszne i zasadne jest posiłkowanie się nomologiczno-dedukcyjnym modelem odkrycia naukowego i ideą wiedzy obiektywnej². Dlatego też kolejnym krokiem było sformułowanie stosownych hipotez, poddawanych następnie testowaniu.

Zasadnicza hipoteza badawcza brzmi następująco: wykorzystanie wymiaru fraktalnego w procesie kwantyfikacji ryzyka inwestycji finansowych przyczynia się do pełnej oraz poprawnej oceny jego poziomu. W warunkach prawdziwości przedstawionej hipotezy poznanie wymiaru fraktalnego staje się zatem nieodłącznym elementem procesu oceny ryzykowności inwestycji, a wszelkie analizy pomijające te aspekty z konieczności tracą walor kompleksowości.

Uwzględniając hipotezę główną, postawiono korespondujące hipotezy o charakterze cząstkowym. Pierwsza z nich głosi, że klasyczne miary ryzyka inwestycyjnego nie umożliwiają dokonania pełnej i poprawnej oceny jego poziomu w warunkach fraktalnego rynku finansowego.

Kolejna hipoteza badawcza polega na wysunięciu przypuszczenia, że wykorzystanie wymiaru fraktalnego w istotnym stopniu rekompensuje utratę informacji niesionej przez klasyczne miary ryzyka w sytuacji występowania na rynku finansowym struktur o charakterze fraktalnym.

Ostatnia hipoteza stwierdza, że pomiędzy wymiarem fraktalnym a poziomem ryzykowności danej inwestycji (w sensie zmienności) zachodzi następująca zależność: dla nieskończone krótkich horyzontów inwestycyjnych wzrost wymiaru fraktalnego skutkuje zwiększeniem poziomu ryzyka. Dla horyzontów nieskończone długich prawdziwa jest zależność odwrotna.

Monografia została ustrukturyzowana w korespondencji ze zdefiniowanym przedmiotem badań, wyznaczonymi celami oraz postawionymi hipotezami badawczymi. Pierwsze dwa rozdziały mają charakter teoriopoznawczy, zaś pozostałe – metodyczny i empiryczny.

Rozdział pierwszy jest poświęcony najistotniejszym **konceptjom matematycznym związanym z geometrią fraktalną**, w szczególności pojęciu wymiaru (zwłaszcza fraktalnego) jako kluczowej charakterystyce badanych obiektów. Ponadto autor poddaje ocenie rozmaite definicje obiektów fraktalnych, analizując je z punktu widzenia przydatności w badaniu finansowych szeregów czasowych.

² K. Popper: Wiedza obiektywna. Ewolucyjna teoria epistemologiczna. WN PWN, Warszawa 1992, s. 103–109.

W rozdziale drugim prezentowana jest **teoria rynku fraktalnego**. Autor poszukuje w nim odpowiedzi na pytanie, jakie są kluczowe determinanty konstytuujące teorię rynku fraktalnego, oraz szczegółowo omawia związane z nią koncepcje matematyczne. Ponadto w rozdziale prezentowana jest ekonomiczna istota teorii rynku fraktalnego. Autor pokazuje także, że w warunkach występowania na rynkach finansowych struktur o charakterze fraktalnym celowe jest poznanie ich wymiaru fraktalnego, mogącego służyć jako miara ryzykowności inwestycji. Dostrzegając pewne niedostatki prezentacji tej problematyki pojawiającej się w literaturze przedmiotu, autor ponadto przedstawia własne podejście do wykorzystania wymiaru fraktalnego w procesie pomiaru ryzyka.

Rozdział trzeci ma **charakter metodyczny**. W rozdziale tym przedstawiono wybrane, uznane za najistotniejsze z punktu widzenia przedmiotu badań, metody szacowania wymiaru fraktalnego. Ponadto zostały one poddane krytycznej analizie. W tym celu wykorzystano dane, którymi posiłkował się Grzegorz Przekota (twórca metody podziału pola). Mimo że wnioski natury ekonomicznej sformułowane w oparciu o uzyskane wielkości mają dziś charakter jedynie historyczny, to jednak konkluzje o charakterze metodycznym są niebagatelne. Autor doszedł bowiem w oparciu o te same dane empiryczne do wniosków (dodatkowo solidnie uzasadnionych w drodze rozumowania) przeciwnych konkluzjom twórcy metody. Sformułowane wskazania wykorzystano w kolejnym rozdziale pracy.

Ostatni rozdział monografii ma **charakter empiryczny**. Zaprezentowano w nim wyniki badań nad fraktalnymi własnościami cen akcji wybranych spółek notowanych na warszawskiej giełdzie. Taki wybór przedmiotu analiz wynika z faktu, że nie dysponujemy odpowiednio licznymi badaniami poświęconymi omawianym zagadnieniom, dotyczącymi relatywnie dużych prób, a odnoszącymi się do papierów wartościowych z krajowego rynku kapitałowego. Ponadto wybór wspomnianych instrumentów finansowych – tj. akcji – jest podyktowany dostępnością szeregów czasowych o stosownych, uznanych za pożądane własnościach. Uzyskane wyniki, zdaniem autora, nie umożliwiają sfalsyfikowania postawionych hipotez, a tym samym stanowią ich popperowską koroborację.

Niniejsza praca powstała jako efekt zainteresowania autora funkcjonowaniem rynków finansowych – w szczególności koncepcjami ich efektywności oraz charakterem struktur występujących na tych rynkach. Ponadto należy podkreślić istotę przedmiotowych zagadnień – warto bowiem pamiętać, że problemy oceny ryzyka inwestycyjnego mają istotny wpływ na efektywność gospodarowania. Tymczasem „Niepewność jest jednym z podstawowych zjawisk towarzyszących naszemu życiu. Jest nieodłącznie związana tak z decyzjami natury ekonomicznej jak i każdej innej”³. Autor ma nadzieję, że niniejsza monografia przyczynia się, choćby w niewielkim stopniu, do lepszego zrozumienia tych niezmiernie skomplikowanych, ale i fascynujących z naukowego (i nie tylko) punktu widzenia zagadnień.

³ F. Knight: Risk, Uncertainty and Profit. Augustus M. Kelley, New York 1964, s. 347.

Rozdział I

Matematyczne podstawy geometrii fraktalnej

*Chmury nie są sferami, linie brzegowe nie są okręgami,
a kora nie jest gładka.
Nawet błyskawica nie porusza się po linii prostej.*

B. Mandelbrot

Obraz jest wart tysiąca słów.

Przysłowie chińskie

Przedmiotem rozważań zawartych w niniejszym rozdziale są **obiekty geometryczne nazwane przez Benoît Mandelbrota fraktalami**. Początkowo odkrycie zbiorów określanych wspólnie tym mianem stało się dla matematyków na tyle szokujące, że traktowano je jako „patologiczne”. Jednocześnie panowało przekonanie, że żaden poważny uczone nie powinien czynić ich przedmiotem swoich badań, właśnie ze względu na odmienną od tego wszystkiego, co dotychczas było analizowane przez matematyków. Choć odkrywanie kolejnych reprezentantów „galerii monstrów” (jak określił je Poincaré⁴) nie dobiegło końca, a ich istnienie było niezaprzeczalnym faktem, to jednak przez wiele lat nie spotkały się ze znaczącym zainteresowaniem. Dopiero w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku Mandelbrot, badając rozmaite zjawiska i procesy, doszedł do wniosku, że zdecydowanie lepiej odzwierciedlają one obiekty występujące w rzeczywistości niż galileuszowskie „trójkąty, koła i inne figury geometryczne”⁵, mające być w tym ujęciu alfabetem matematyki – jako nauki opisującej naturę. Choć wykorzystanie figur takich jak sfery, stożki czy walce było znacznie prostsze niż posługiwanie się owymi „matematycznymi dziwolągami”, to jednak rezultaty kolejnych badań skłaniały do przyjęcia wniosku, że realnie istniejące obiekty mają (przynajmniej w pewnym zakresie) charakter fraktalny. W tej sytuacji dalszy postęp nauki wymagał zarzucenia dotychczasowego podejścia do twórców fraktalnych i uczynienia ich przedmiotem intensywnych analiz.

Początkowo fraktale były wykorzystywane głównie w naukach ścisłych – przede wszystkim fizyce. Wiązało się to z prowadzonymi wówczas badaniami nad zjawiskiem chaosu i chaotycznymi układami dynamicznymi. Okazało się bowiem, że atraktory⁶ niektórych układów dynamicznych

⁴ B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman & Company, New York 1983, s. 9.

⁵ I. Stewart: *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*. WN PWN, Warszawa 1996, s. 252.

⁶ Nieformalnie przez atraktor układu dynamicznego rozumie się „(...) podzbiór przestrzeni stanów, do którego z upływem czasu zmierzają (przyciągane są) punkty z pewnego otoczenia tego zbioru” (H. Zawadzki (red.): *Zbiory graniczne i atraktory w modelach ekonomii matematycznej*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2006, s. 35). Określenie „atraktor” pochodzi z łac. *attraho* – przyciągać (ibid.).

wykazują własności fraktalne. Użyteczność podejścia wykorzystującego obiekty fraktalne sprawiła, że zaczęto je stosować w dziedzinach takich jak geologia, hydrodynamika czy astronomia. Twórca geometrii fraktalnej przekonywał do wykorzystania jej także w naukach społecznych – już w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku wskazywał na możliwość modelowania cen surowców czy papierów wartościowych z wykorzystaniem procesów stochastycznych, których trajektorie miały cechy fraktalne. Jednak mimo wielu argumentów przemawiających na korzyść zastosowania metod opierających się na założeniu o fraktalnych właściwościach badanych obiektów, stopień skomplikowania odnośnej teorii nie zachęcał do podjęcia takich działań. Zaniechanie analizowania funkcjonowania rynków finansowych z wykorzystaniem narzędzi dostarczanych przez geometrię fraktalną nie było także całkowicie bezzasadne. Dysponowano bowiem teorią zdecydowanie prostszą (będącą *de facto* przypadkiem szczególnym bardziej ogólnej teorii rynku fraktalnego), która wydawała się stosunkowo poprawnie opisywać rzeczywistość – była nią hipoteza o kształtowaniu się cen papierów wartościowych zgodnie z modelem Osborne’a-Samuelsona⁷. Ponieważ jednak dane nagromadzone od tego czasu skłaniają do uznania go w pierwotnej postaci za sfalsyfikowany, metodologiczna oraz empiryczna konieczność wymusiła podjęcie dodatkowych analiz mających na celu wypracowanie nowej teorii. Dla jej poprawnej prezentacji, zbadania zgodności z rzeczywistością, sformułowania uzasadnionych wniosków natury ekonomicznej oraz zaproponowania ewentualnych korekt (zarówno co do istoty koncepcji, jak i wykorzystywanego instrumentarium) niezbędne jest przedstawienie podstawowych pojęć związanych z geometrią fraktalną. Jest to celem niniejszego rozdziału.

1.1. Powstanie geometrii fraktalnej

Tytuł niniejszego podrozdziału może wydawać się niezbyt trafny, bowiem jego poprawność można zakwestionować, dowodząc, że obiekty rzeczywiste cechujące się własnościami fraktalnymi istniały także przed pojawieniem się wspomnianej gałęzi geometrii. Warto w tym miejscu przypomnieć o nader pożytecznym rozróżnieniu dokonany przez Michała Hellera – pomiędzy *matematyką* a *Matematyką*. O ile *matematyka* (bądź *nasza matematyka*) jest tworem ludzkiego umysłu, powstałym w długim procesie ewolucyjnym, o tyle *Matematyka* (lub *matematyka jako taka*) to relacje i struktury „(...) którym podlegały ruchy atomów i gwiazd, zanim jeszcze rozpoczęła się ewolucja biologiczna”⁸. W naszym przypadku celowy wydaje się podobny zabieg – pozwalający na odróżnienie *geometrii fraktalnej* od *Geometrii Fraktalnej*. Jego dokonanie gwarantuje, że dalsze rozważania o powstaniu *geometrii fraktalnej* nie będą mogły być niewłaściwie zinterpretowane.

Najprawdopodobniej **pierwszym obiektem o własnościach uznawanych za fraktalne** był wykres funkcji odkrytej przez **Karla Weierstrassa** najpóźniej w 1872 r.⁹ Funkcja ta okazała się być

⁷ Zob. M.F.M. Osborne: Brownian Motion in the Stock Market. „Operations Research”, Vol. 7, No. 2 March-April 1959 oraz P. Samuelson: Rational Theory of Warrant Pricing. „Industrial Management Review”, Vol. 6, No. 2 Spring 1965.

⁸ M. Heller: Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna? [W:] M. Heller, J. Życiński, A. Michałak (red.): Matematyczność przyrody. Papięska Akademia Teologiczna, Kraków 1990, s. 15.

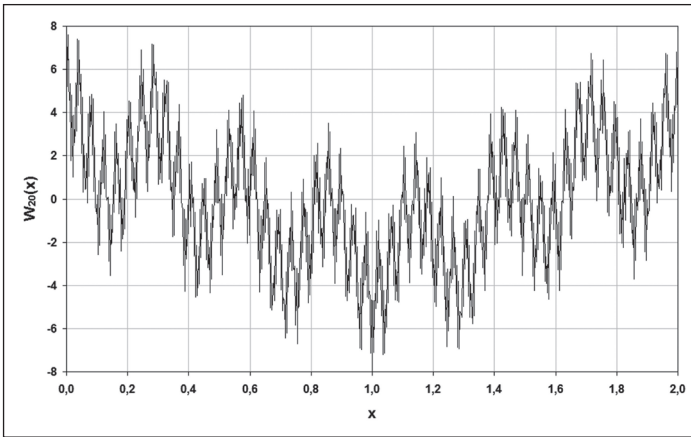
⁹ Weierstrass przedstawił swoje odkrycie innym członkom Berlińskiej Akademii Nauk 18 lipca 1872 r. Wspomina on także, że Bernhard Riemann miał najpóźniej w 1861 r. stwierdzić, że innym przykładem funkcji o opisywanych własnościach jest $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$, jednak nie pozostawił żadnego dowodu tego faktu (K. Weierstrass: On Continuous

Functions of a Real Argument that do not have a Well-defined Differential Quotient. [In:] G. Edgar (ed.): Classics on Fractals. Westview Press, Boulder 2004, s. 4).

niezmiernie interesująca i jednocześnie szokująca matematyków – jest ona ciągła i jednocześnie nieróżniczkowalna w żadnym punkcie swej dziedziny (dokładniej rzecz biorąc, różniczkowalna co najwyżej dla punktów ze zbioru o mierze równej zero). Co więcej – jak widać na przedstawionych wykresach – cechuje się pewną formą samopodobieństwa. Została ona określona następująco¹⁰:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

przy czym $a \in (0,1)$, a b jest liczbą nieparzystą, taką, że $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Istnienie tej funkcji zadawało kłam poglądom większości ówczesnych matematyków, że „(...) każda funkcja ciągła jest różniczkowalna poza kilkoma izolowanymi punktami” (Ampère)¹¹. Przedstawienie kontrprzykładu przez Weierstrassa, rozpozsechnionego następnie przez DuBois Reymonda w 1875 r., spowodowało, że „Rok 1875 stał się datą symbolizującą początek wielkiego kryzysu w matematyce”¹².

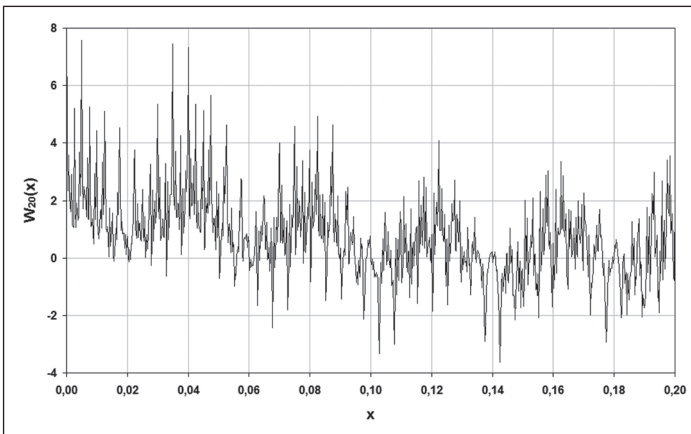


Rys. 1. Przybliżenie funkcji Weierstrassa dla $a = 0,9$, $b = 7$ za pomocą funkcji

$$W_{20}(x) = \sum_{k=0}^{20} a^k \cos(b^k \pi x)$$

dla $x \in \langle 0, 2 \rangle$

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 2. Przybliżenie funkcji Weierstrassa dla $a = 0,9$, $b = 7$ za pomocą funkcji

$$W_{20}(x) = \sum_{k=0}^{20} a^k \cos(b^k \pi x)$$

dla $x \in \langle 0; 0, 2 \rangle$

Źródło: Opracowanie własne.

¹⁰ Notacja za: T. Szarek: O wymiarze wykresu funkcji nigdzie nieróżniczkowalnej. „Wiadomości Matematyczne”, t. 42/2006, s. 15.

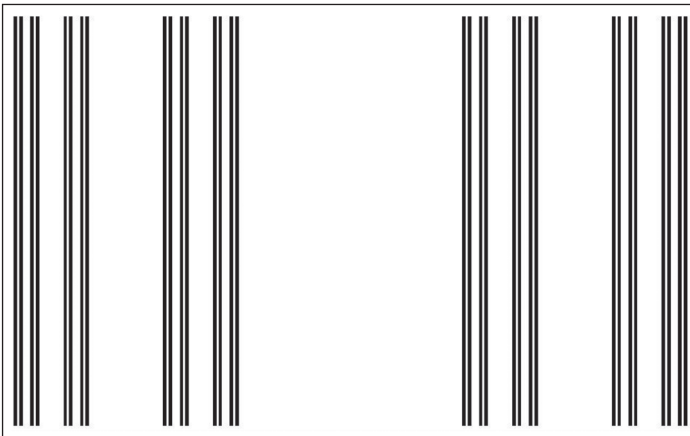
¹¹ Ibid.

¹² B. Mandelbrot: The Fractal..., op. cit., s. 420.

Kolejnym przykładem (często uznawanym za najistotniejszy spośród omawianych) obiektu fraktalnego jest zbiór nazwany na cześć niemieckiego matematyka **Georga Cantora**. Idea konstrukcji tego zbioru została przedstawiona po raz pierwszy przez angielskiego matematyka Henry’ego Stephena Smitha w 1875 r., przy okazji badania całkowalności rozmaitych funkcji nieciągłych¹³. Jego specjalne własności zostały jednak zauważone dopiero przez Cantora w pracy wydanej przez niego w 1883 r. Procedura jego tworzenia dana jest w sposób rekurencyjny. W pierwszej kolejności odcinek jednostkowy dzielony jest na trzy kolejne, równe części. Spośród nich środkowa jest usuwana ze zbioru. Następnie w podobny sposób postępujemy z pozostałymi dwoma odcinkami, itd. Zbiór punktów pozostały po dokonaniu nieskończonej liczby iteracji jest właśnie zbiorem Cantora. Formalnie, jeżeli $A_0 = \langle 0,1 \rangle$, a przez A_n oznaczyć zbiór powstały wskutek usunięcia części środkowych odcinków tworzących zbiór A_{n-1} , $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$, to **zbiór Cantora** C można zdefiniować jako¹⁴:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Jego przybliżona graficzna ilustracja została przedstawiona poniżej (dla lepszego efektu wizualnego zaprezentowano właściwie iloczyn kartezjański zbioru Cantora i odcinka zawartego w prostej prostopadłej do prostej, której podzbiorem jest zbiór Cantora).



Rys. 3. Iloczyn kartezjański zbioru Cantora i odcinka zawartego w prostej prostopadłej do prostej, której podzbiorem jest zbiór Cantora (przybliżenie)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Granice chaosu. Fraktale*. Cz. 1. WN PWN, Warszawa 1997, s.108.

Zbiór Cantora, prócz innych ciekawych własności¹⁵, wykazuje zasadniczą cechę właściwą obiektom fraktalnym – jest samopodobny. Z tego też względu jest on jednym z podstawowych zbiorów rozpatrywanych podczas analizowania fraktali. Jego pojawienie się (jak i inne odkrycia Cantora) stało się przedmiotem wielu kontrowersji. Charles Hermite odnotował: „Czytanie prac Cantora jest prawdziwą torturą... nikt z nas nie odczuwa potrzeby by iść jego śladem”¹⁶.

¹³ H.S. Smith: On the Integration of Discontinuous Functions. „Proceedings of the London Mathematical Society”, Vol. 6, No. 85 June 1875, s. 147–148. Koncepcja Smitha jest nieco odmienna niż w przypadku klasycznego zbioru Cantora. Smith dzielił odcinek jednostkowy na m części ($m > 2$) i usuwał ostatni fragment. Należy także podkreślić, że o ile Cantor rozważał wszystkie punkty pozostałe po procesie nieskończonego eliminowania środkowych części kolejnych odcinków, o tyle Smith analizował jedynie zbiór punktów będących końcami owych odcinków. Z tego względu określanie Smitha mianem „odkrywcy zbioru Cantora” nie wydaje się ściśle i do końca uprawnione.

¹⁴ P. Pierański: *Fraktale. Od geometrii do sztuki*. Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992, s. 12.

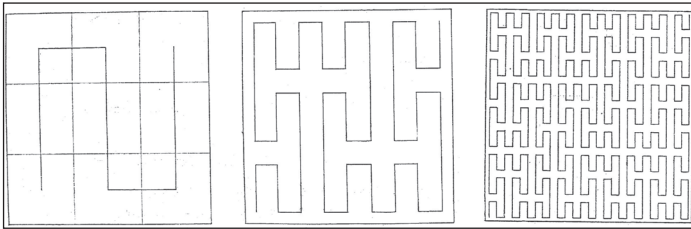
¹⁵ Dla przykładu – mimo że zbiór Cantora jest mocy continuum, jego miara wynosi 0.

¹⁶ B. Mandelbrot: *The Fractal...*, op. cit., s. 410. Tłum. za: P. Pierański: *Op. cit.*, s. 43.

Początkowy silny sprzeciw matematyków był jedną z przyczyn, które zahamowały rozwój (czy raczej: powstawanie) geometrii fraktalnej na kilka dekad.

Czynnikiem, który przyczynił się do zaprezentowania omawianych dalej obiektów, była dyskusja nad poprawną definicją krzywej. Rozważania nad wskazanym problemem doprowadziły matematyków: **Giuseppe Peano** oraz **David Hilberta** do konstrukcji **krzywych wypełniających płaszczyznę**¹⁷. Krzywe te cechują się samopodobieństwem – jedną z najistotniejszych własności obiektów fraktalnych.

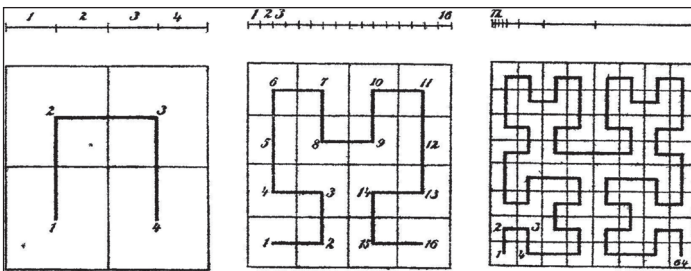
Krzywa Peano została przedstawiona w 1890 r. Jej konstrukcję włoski uczoney oparł na wywodzie arytmetycznym¹⁸, jednak był całkowicie świadom jego konsekwencji geometrycznych. Krzywa ta jest niezmiernie interesująca nie tylko ze względu na swe własności fraktalne, lecz także z powodu podobieństwa do struktur występujących w organizmach żywych – jak np. układu krwionośnego czy oddechowego. Co więcej, podobnie jak w przypadku wskazanych układów, krzywa Peano posiada nieskończenie wiele punktów rozgałęzienia.



Rys. 4. Etapy konstrukcji krzywej Peano

Źródło: W. Sierpiński: O krzywych wypełniających kwadrat. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.23/1912, s. 204–205.

Opis podobnej krzywej przedstawił w tym samym czasie także Hilbert¹⁹. Mimo różnic pomiędzy metodami konstrukcji podanymi przez wspomnianych uczonych, obydwie krzywe wypełniają kwadrat i mają zbliżone własności.



Rys. 5. Etapy konstrukcji krzywej Hilberta

Źródło: D. Hilbert: O odwzorowaniu ciągłym linii na kawałku powierzchni. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.5/1894, s. 14.

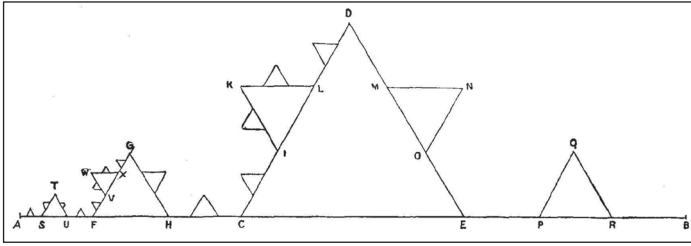
Wśród „matematycznych monstrów” odkrytych na przełomie wieku XIX i XX można odnaleźć także krzywą – we właściwym znaczeniu tego słowa – skonstruowaną po raz pierwszy w 1904 r. przez matematyka szwedzkiego **Helge von Kocha**. Użycie pojęcia „krzywa” jest zdecydowanie bardziej uzasadnione w tym przypadku niż w odniesieniu do „krzywej” Peano czy Hilberta (jak się bowiem okaże, ich wymiar topologiczny wynosi 2, podczas gdy dla krzywej von Kocha 1).

¹⁷ Mandelbrot sugeruje, by raczej używać określenia „ruch Peano”, ponieważ wymiar topologiczny wspomnianego obiektu wynosi dokładnie 2, co z kolei sugeruje, by traktować go odmiennie niż standardowe krzywe (zob. B. Mandelbrot: *The Fractal...*, op. cit., s. 58). W niniejszej pracy pozostano przy stwierdzeniu tradycyjnym.

¹⁸ G. Peano: *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*. „Mathematische Annalen”, t. 36/1890, s. 157–160.

¹⁹ D. Hilbert: *O odwzorowaniu ciągłym linii na kawałku powierzchni*. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.5/1894. Pierwotny tekst niemiecki ukazał się w 1891 r.

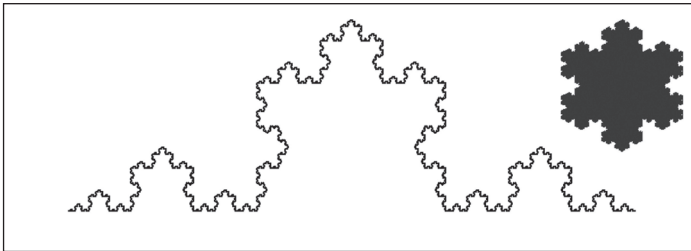
Krzywa nazwana następnie nazwiskiem **von Kocha** została stworzona jako przykład krzywej ciągłej, nieposiadającej stycznej w żadnym punkcie, a jednocześnie zadanej w sposób geometryczny, bez uciekania się do skomplikowanego określenia analitycznego, jakie podał np. Weierstrass.



Rys. 6. Etapy konstrukcji krzywej von Kocha

Źródło: H. von Koch: On a Continuous Curve without Tangents Constructible from Elementary Geometry. [In:] G. Edgar (ed.): Classics on Fractals. Westview Press, Boulder 2004, s. 29.

Początkowo rozważamy odcinek jednostkowy. Następnie dzielimy go na trzy przystające części, a środkową zastępujemy dwoma pozostałymi bokami trójkąta równobocznego, którego odcinek środkowy byłby podstawą. Postępowanie to powtarzamy *ad infinitum*. W rezultacie otrzymujemy krzywą, której przybliżenie uzyskane w siedmiu iteracjach przedstawiono poniżej. Jeżeli postępowanie to zastosować względem boków pewnego trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **płatkiem śniegu von Kocha**.



Rys. 7. Krzywa oraz płatek śniegu von Kocha (przybliżenie)

Źródło: Opracowanie własne.

Obiekt geometryczny powstający w granicy nie tylko jest samopodobny, lecz cechuje się nieskończenie wielką długością²⁰, ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$. Wynik ten wydaje się być zaskakujący,

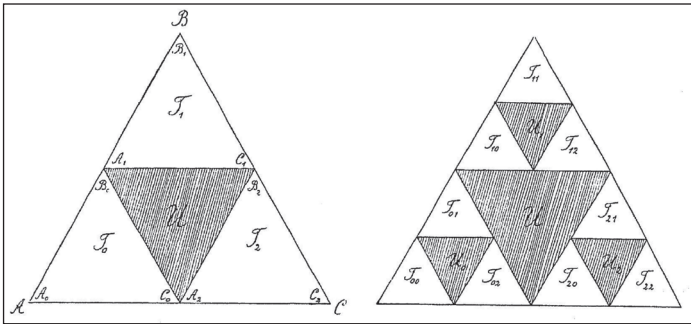
zwłaszcza jeżeli odnieść go do płatka śniegu von Kocha – okazuje się bowiem, że figura płaska o niezerowym, lecz skończonym polu może mieć brzeg o nieskończonej długości. Wynik ten zdaje się przeczyć naszej intuicji, podobnie jak nieistnienie pochodnej funkcji ciągłej. Hermite w liście do Stieltjesa ubolewał nad jej odkryciem, „(...) odwracając się z przerażeniem i zgrozą od tej pożałowania godnej plagi funkcji bez pochodnych”²¹. Mandelbrot zaproponował nazwanie krzywej von Kocha i obiektów konstruowanych w podobny sposób *teragonami* – co w języku greckim oznacza „monstrum”. Warto odnotować, że to najprawdopodobniej krzywa przedstawiona przez szwedzkiego uczonego była jedną z kluczowych inspiracji dla twórcy geometrii fraktalnej²².

²⁰ Co więcej, „(...) długość łuku leżącego między dowolnymi dwoma punktami krzywej jest nieskończona” (H. von Koch: On a Continuous Curve without Tangents Constructible from Elementary Geometry. [In:] G. Edgar: Op. cit., s. 38).

²¹ B. Mandelbrot: The Fractal..., op. cit., s. 36.

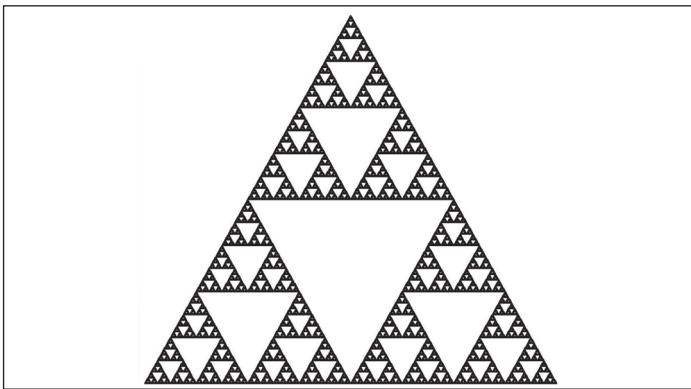
²² Mandelbrot słusznie stanowczo sprzeciwia się często występującemu określeniu krzywej Kocha jako „nieregularnej” – co prawda nie zawiera ona żadnego odcinka, lecz algorytm jej konstrukcji jest niezmienny i mało skomplikowany (ibid., s. 41).

Dla powstania geometrii fraktalnej niemałe zasługi położył także znakomity polski matematyk, **Wacław Sierpiński**. W 1915 r. przedstawił on konstrukcję obiektu fraktalnego nazwanego później na cześć uczonego **trójkątem Sierpińskiego**²³. Rozważmy trójkąt równoboczny T. Następnie dzielimy trójkąt T na cztery przystające trójkąty, łącząc środki jego boków. Przez U oznaczamy trójkąt zawierający środek trójkąta T. Całe wnętrze trójkąta U odrzucamy. Dalej postępowanie powtarzamy w odniesieniu do nowo powstałych trójkątów *ad infinitum*. W rezultacie uzyskujemy obiekt geometryczny samopodobny, o wszelkich klasycznych cechach fraktala oraz o zerowym polu.



Rys. 8. Etapy konstrukcji trójkąta Sierpińskiego

Źródło: W Sierpiński: O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.27/1916, s. 78.



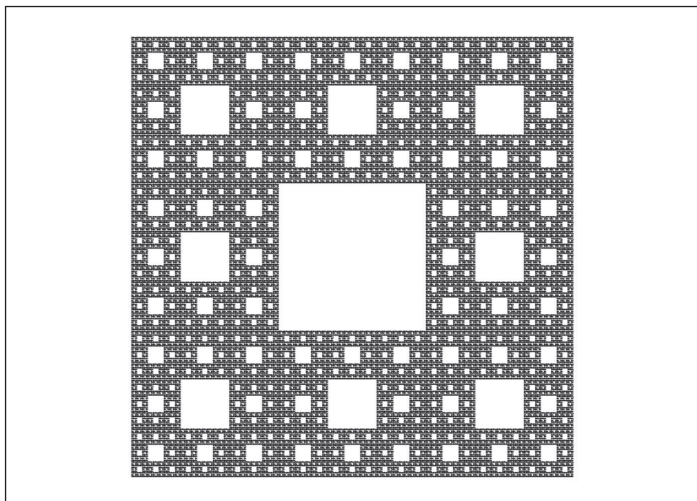
Rys. 9. Trójkąt Sierpińskiego (przybliżenie)

Źródło: Opracowanie własne.

Prócz trójkąta Sierpińskiego uczoney ten poddał także analizie obiekt nazwany później **dywanem Sierpińskiego**. Warto przypomnieć, że w rzeczywistości figura ta została po raz pierwszy skonstruowana przez **Stefana Mazurkiewicza** już w 1914 r., jednakże jego wywód nie został ogłoszony drukiem. Mimo iż Sierpiński nie był twórcą omawianego obiektu, to jednak ze względu na fakt odkrycia przezeń niezwykłych własności tej figury przyjęło się określać ją jego nazwiskiem. Jak pisze: „Samą krzywą otrzymuje p. Mazurkiewicz, dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów (zapomocą równoległych do boków) i usuwając wewnątrz kwadratu środkowego, a z każdym z pozostałych 8-miu kwadratów postępując taksamo jak z pierwotnym kwadratem, i t. d. in infinitum”²⁴. W rezultacie opisanego postępowania otrzymujemy figurę geometryczną, której przybliżenie przedstawiono poniżej.

²³ W. Sierpiński: O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.27/1916, s. 77 (pierwotny tekst francuski ukazał się w roku 1915).

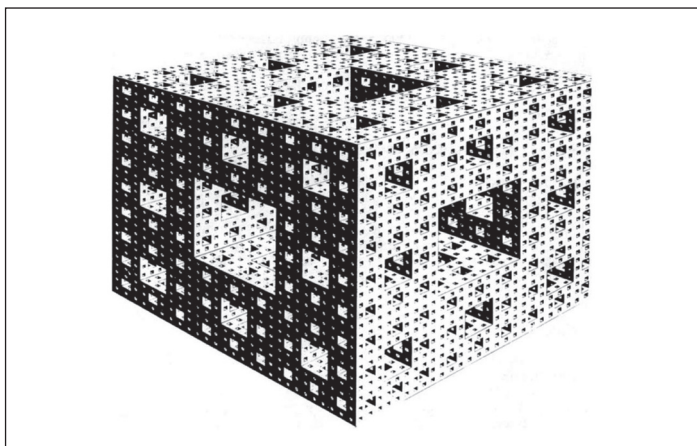
²⁴ W. Sierpiński: O krzywej..., op. cit., s. 86.



Rys. 10. Dywan Sierpińskiego (przybliżenie)

Źródło: Opracowanie własne.

Analogonem dywanu Sierpińskiego jest obiekt geometryczny nazwany na cześć jego odkrywcy **gąbką Mengera**. Został on po raz pierwszy przedstawiony przez matematyka austriackiego **Karla Mengera** w 1926 r. Podobnie jak dotychczas przedstawione fraktale jego konstrukcja opiera się na metodzie rekurencyjnej. Początkowo rozważamy pewien sześcian. W pierwszym kroku dzielimy go na 27 przystających sześcianów o boku trzykrotnie mniejszym. Następnie usuwamy sześcian zawierający środek sześcianu pierwotnego oraz sześciany zawierające środek każdej ze ścian sześcianu pierwotnego (tj. łącznie 7 sześcianów). Podobnie postępujemy z uzyskanym obiektem – *ad infinitum*. W granicy punkty nieusunęte tworzą właśnie gąbkę Mengera.



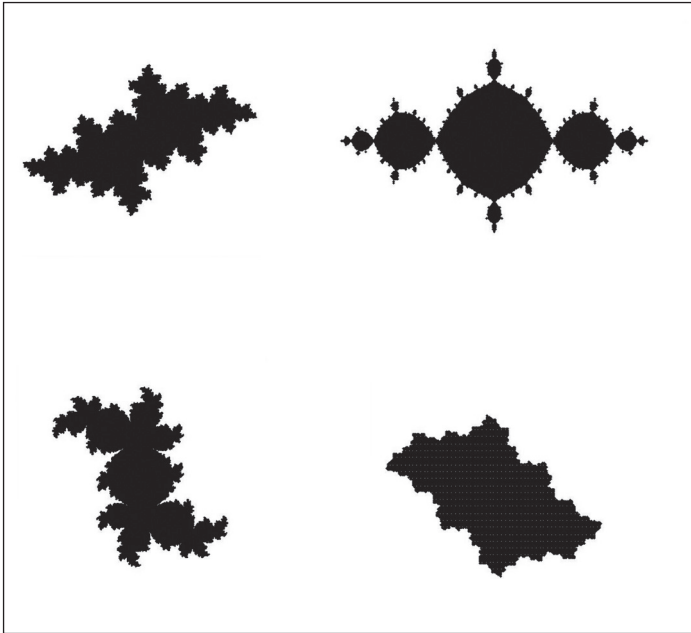
Rys. 11. Gąbka Mengera (przybliżenie)

Źródło: A. Barcellos: The Fractal Geometry of Mandelbrot. „The College Mathematics Journal”, Vol. 15, No. 2 March 1984, s. 109.

W tym samym czasie swoje kluczowe prace stworzyli **Gaston Julia** oraz **Pierre Fatou**. Dotyczyły one odwzorowań wymiernych płaszczyzny zespolonej²⁵. Okazało się, że brzegi basenów przyciągania rozpatrywane przez wspomnianych uczonych mają niezmiernie skomplikowaną strukturę – strukturę, którą dziś nazwano by fraktalną. W najprostszych przypadkach rozważamy

²⁵ T. Martyn: Fraktale i obiektywne algorytmy ich wizualizacji. Wydawnictwo NAKOM, Poznań 1996, s. 96.

odwzorowanie postaci $z \rightarrow z^2 + c$, gdzie z jest zmienną zespoloną, zaś c pewną stałą zespoloną. Przyjmując określoną wartość z_0 , badamy następnie zachowanie wyrazów ciągu (z_n) , gdzie $z_{n+1} = z_n^2 + c$. W zależności od wyboru punktu początkowego ciąg $(|z_n|)$ może być ograniczony lub nie. W tej sytuacji **zbiorem Julii** (*Julia set*) nazywamy brzeg zbioru tych punktów, dla których ciąg $(|z_n|)$ nie jest ograniczony (ekwiwalentnie: dla których ciąg ten jest ograniczony). Rozważa się także wypełniony zbiór Julii (*filled-in Julia set*), tj. zbiór wszystkich punktów, dla których ciąg $(|z_n|)$ jest ograniczony (a nie tylko jego brzeg). Przykłady wypełnionych zbiorów Julii w zależności od stałej c przedstawiono poniżej.



Rys. 12. Wypełnione zbiory Julii (przybliżenia) dla odwzorowań:

$$z \rightarrow z^2 - 0,5 - 0,5i,$$

$$z \rightarrow z^2 - 1,$$

$$z \rightarrow z^2 + 0,25 + 0,5i,$$

$$z \rightarrow z^2 - 0,25 + 0,5i$$

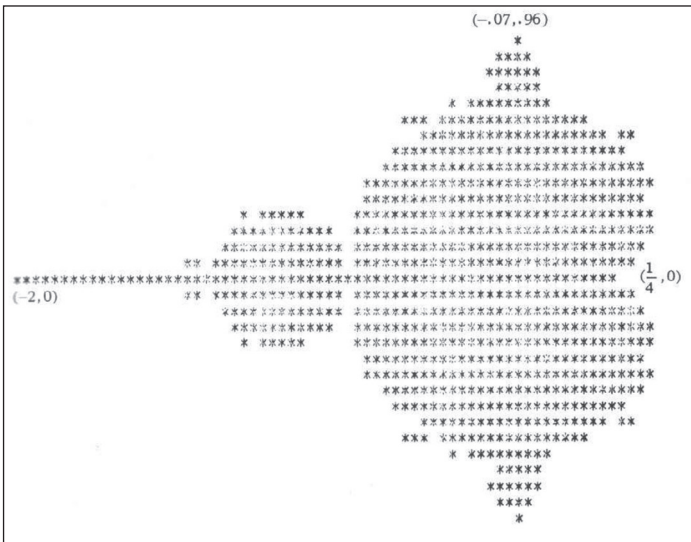
Źródło: Opracowanie własne.

Można rozważać także dowolne odwzorowanie wymierne płaszczyzny zespolonej w siebie. Wówczas definiuje się w sposób formalny: „Zbiorem Julii $J(W_c)$ nazywamy brzeg zbioru przyciągania $U \in \mathbb{C}$ punktu stałego $z^* = \infty$ odwzorowania wymiernego W_c , czyli $J(W_c) = \text{Fr} \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} W_c^n(z) \rightarrow \infty \right\}$ ²⁶, gdzie przez $\overline{\mathbb{C}}$ oznaczamy zbiór liczb zespolonych domknięty przez punkt w nieskończoności, Fr – brzeg zbioru, zaś W_c^n – n -krotne złożenie odwzorowania W_c . W tym przypadku określamy **zbiór Fatou** jako zbiór, którego zbiór Julii jest dopełnieniem do zbioru $\overline{\mathbb{C}}$. Z powodu trudności z analitycznym określeniem, czy dany punkt należy do wspomnianych zbiorów, na pierwsze dokładniejsze ich wizualizacje należało czekać aż do powstania odpowiednio wydajnych obliczeniowo komputerów²⁷. Ze względu na niezmiernie bogatą strukturę zainspirowały one twórcę geometrii fraktalnej – Benoît Mandelbrota do dalszych analiz nad odwzorowaniami płaszczyzny zespolonej i spopularyzowania zbioru o fraktalnych własnościach, nazwanego następnie zbiorem Mandelbrota.

²⁶ Ibid., s. 98.

²⁷ Istniały one oczywiście także wcześniej, jednak dotyczyły albo przypadków mało skomplikowanych, albo były niedokładne (zob. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Granice chaosu. Fraktale. Cz. 1. WN PWN, Warszawa 1997, s. 173).

Zbiór Mandelbrota został przedstawiony po raz pierwszy²⁸ w pracy Roberta Brooksa i Petera Matelskiego z 1978 r. oraz przez Mandelbrota w 1980 r. Zbiór ten został określony przez niektórych matematyków mianem „najbardziej skomplikowanego obiektu matematycznego” – obiektu o własnościach fraktalnych.



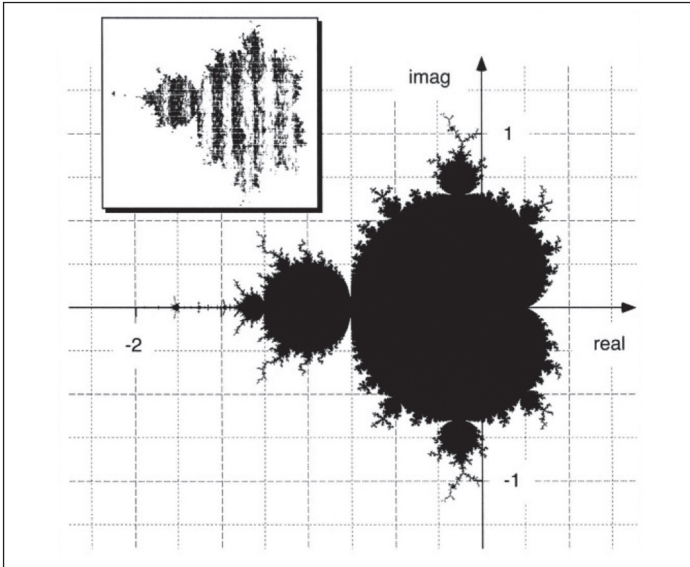
Rys. 13. Przybliżenie zbioru Mandelbrota wg Brooksa i Matelskiego

Źródło: R. Brooks, P. Matelski: *The Dynamics of 2-Generator Subgroups of PSL (2, C)*. [In:] I. Kra, B. Maskit (eds.): *Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*. Princeton University Press, Princeton 1981, s. 71.

Zbiór nazwany przez Johna Hubbarda i Adriena Douady’ego nazwiskiem Mandelbrota można zdefiniować następująco: „Zbiorem Mandelbrota $M(W_c)$ nazywamy zbiór tych wartości parametru $c \in \overline{\mathbb{C}}$, dla których zbiór Julii $J(W_c)$ wielomianu W_c jest zbiorem spójnym, czyli $M(W_c) = \left\{ c \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} W_c^n(0) \rightarrow \infty \right\}$ ²⁹.

²⁸ Kwestia pierwszeństwa odkrycia zbioru Mandelbrota budziła znaczne kontrowersje. Bezapelacyjnie o swoim pierwszeństwie w odkryciu tego obiektu był przekonany chyba wyłącznie sam Mandelbrot. Podkreślał on, że nawet jeżeli rzeczywiście wydruk Brooksa i Matelskiego powstał wcześniej niż jego (czego także nie uznawał za dowiedzione), to mimo to jemu należy przypisać ów honor, w jego opinii bowiem Brooks i Matelski „(...) nie analizowali dogłębnie tego rysunku” (B. Mandelbrot: *Some „Facts” That Evaporate Under Examination*. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 11, No. 4/1989, s. 17). Brooks odrzucił sugestie Mandelbrota, stwierdzając, że ten nie może być „(...) tak pewnym tego, co przemyśleliśmy [tj. Brooks z Matelskim – przyp. R.B.], a czego nie (...)” (R. Brooks: *The Mandelbrot Set*. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 12, No. 1/1990, s. 3). Jednocześnie wskazał on, że w jego opinii właściwym odkrywcą zbioru Mandelbrota – całkowicie świadomym jego postaci – był Fatou już ok. 1920 r., a jedynie brak narzędzi informatycznych uniemożliwił mu wówczas sporządzenie prezentacji graficznej. Z kolei Matelski stwierdził, że uznanie Mandelbrota za odkrywcę wspomnianego zbioru zmusza do przyjęcia, iż Brooks i on sam byli jego współodkrywcami: „Nie musisz w pełni eksploatować wszystkich surowców mineralnych kontynentu by go odkryć” – „Wszystko co musisz zrobić, to uklęknąć i ucałować plażę” (zob. J. Horgan: *Mandelbrot Set-To*. „Scientific American”, April 1990). Do podkreślenia osiągnięć na drodze wiodącej do odkrycia zbioru Mandelbrota dąży ponadto matematyk John Hubbard, który twierdzi, że już w 1976 r. uzyskał wizualizację (częściową) tego zbioru, a swoje rysunki przekazał Mandelbrotowi. Ten z kolei wskazuje, że Hubbard pokazał mu jedynie prezentację graficzną zbiorów Julii, a nie zbioru Mandelbrota. Jednocześnie odpiera on argumentację wspomnianych uczonych podkreślających rolę definicji Fatou, głosząc, że „Definicja nic nie znaczy” – „Musisz wskazać, dlaczego coś jest istotne” (zob. J. Horgan: *Mandelbrot Set-To*. „Scientific American”, April 1990). Oponenti Mandelbrota mimo sporów i bezkompromisowości swego adwersarza nie kwestionują słuszności określenia wspomnianego zbioru jego nazwiskiem, niezależnie od tego, kogo należałoby wskazać za jego rzeczywistego odkrywcę.

²⁹ T. Martyn: *Op. cit.*, s. 111.



Rys. 14. Zbiór Mandelbrota (przybliżenie) wraz z wydrukiem uzyskanym przez Mandelbrota

Źródło: H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Granice chaosu. Fraktale*. Cz. 2. WN PWN, Warszawa 1997, s. 475.

Pojawienie się zarówno zbioru Mandelbrota, jak i zbiorów Julii rodziło wiele pytań odnośnie do ich natury i własności, które zaowocowały wzrostem zainteresowania matematyków – lecz także uczonych z innych dziedzin – koncepcją zastosowania obiektów fraktalnych do modelowania zjawisk występujących w rzeczywistym świecie. Z tego też względu o właściwym powstaniu geometrii fraktalnej możemy mówić w odniesieniu do okresu po ukazaniu się pierwszych publikacji Mandelbrota z lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Do tego czasu obiekty o własnościach fraktalnych pojawiały się bardzo rzadko i na marginesie rozważań dotyczących wyłącznie matematyki abstrakcyjnej. Za jedyny wyjątek należy uznać pracę **Lewisa Fry Richardsona** oraz rozważania (bardzo często pomijanych w tym kontekście) znakomitych matematyków polskich: **Hugo Steinhausa** i **Juliana Perkala**.

Steinhaus jeszcze w latach trzydziestych ubiegłego wieku zwrócił uwagę na fakt (który już wówczas nie był tajemnicą dla kartografów³⁰), że wymierzona długość pewnych obiektów geograficznych jest uzależniona od wielkości podziałki³¹, za pomocą której dokonuje się pomiaru. Jeżeli w przypadku kolejnych przybliżeń przy określaniu pola obszarów uzyskany rezultat różni się coraz mniej od rzeczywistego, to „Inaczej jest z długością. Zgeneralizowany obraz rzeki nie uwzględni

³⁰ Por. np. M. Goldschlag: Przyczynek do metodyki pomiarów długości linii krzywych na kartach. „Kosmos”, z. 4–6 czerwiec 1913, s. 532–535, 539–540.

³¹ Właściwie należałoby stwierdzić: od stopnia generalizacji mapy. Jeżeli bowiem dysponujemy mapą o określonej dokładności, to zmiana jej skali i wielkości podziałki nie sprawi, że uzyskane wyniki będą odmienne. Jak zauważa Steinhaus: „Chcąc określić stopień generalizacji linii krzywej na mapie, natrafiamy na poważne trudności, gdyż pojęcie generalizacji nie jest w geografii sprecyzowane”, jednak „Wystarczy nam następująca umowa: uważamy, że linie na mapie uzyskuje się przez zaznaczanie na niej punktów i łączenie ich odcinkami prostymi; dokładności położenia punktów nie kwestionujemy. Gdy między punkty już zaznaczone wstawiamy nowe na podstawie zdjęć geodezyjnych, a stare zostawiamy, liczba boków wzrasta i wzrasta stopień generalizacji. Możemy więc mówić o generalizacjach $G_1, G_2, \dots, G_m, \dots$, nie precyzując znaczenia tych symboli, żądając jednak, żeby mapy oznaczone większym wskaźnikiem powstawały z map oznaczonych mniejszym przez dodanie punktów” (H. Steinhaus: O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii. „Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego”, nr 4/1949, dod. 5, s. 4). W dalszych rozważaniach przyjęto powyższe rozumienie sformułowania „wielkość podziałki”, zaś „Przez *długość* łuku rozumiemy granicę długości łamanych wpisanych w ten łuk, przy skracaniu boków łamanej do zera” (J. Perkal: O długości krzywych empirycznych. „Zastosowania matematyki”, nr 3/1957, s. 258.

np. zakrętów, których promień byłby na mapie mniejszy niż $\frac{1}{3}$ milimetra. (...) Za każdą zmianą skali długość wzrośnie o kilka, nawet o kilkanaście procent”³². Steinhaus dopuszcza zatem możliwość, że (jak w przypadku teoretycznych krzywych fraktalnych) długość mierzonego obiektu okaże się nieskończona – „Lewy brzeg Wisły, jeżeli mierzyć go z rosnącą dokładnością, zwiększyłby długość dziesięć, sto czy nawet tysiąc razy w stosunku do długości odczytanej z mapy szkolnej”³³. Kluczowe jest tu uznanie niezmiernej złożoności właściwej obiektom rzeczywistym – złożoności odzwierciedlającej ich fraktalny charakter oraz własności długości – „Paradoks długości bierze się stąd, że długość jest funkcjonalem nieograniczonym w sąsiedztwie każdego łuku”³⁴. Jako jeden z pierwszych zauważył on, że „Stwierdzeniem najbardziej zbliżonym do rzeczywistości byłoby **określenie większości łuków spotykanych w naturze jako nieprostowalnych**. Ta konstatacja jest przeciwieństwem poglądu, że łuki nieprostowalne są wymysłem matematyków, a łuki występujące w naturze są prostowalne: w rzeczywistości jest bowiem odwrotnie”³⁵. Zdaniem autora to właśnie Steinhaus można uznać za prekursora zastosowania geometrii fraktalnej do badania zjawisk występujących w świecie rzeczywistym.

Problematyka mierzenia długości krzywych empirycznych była także przedmiotem zainteresowań Perkala. Ze względu na konieczność posługiwania się pojęciem długości (skończonej), uwzględniając mankamenty „długości rzędu n ” zaproponowanej przez Steinhaus, wprowadził on pojęcie „długości rzędu ε ”, będącej modyfikacją określenia podanego przez Hermanna Minkowskiego³⁶. W tym celu dla dowolnego łuku X zdefiniował on ε -aureolę³⁷ jako $A_\varepsilon(X) = \sum_x [(x, X) \leq \varepsilon]$,

gdzie (x, X) oznacza odległość punktu x od łuku X , tj. $(x, X) = \min_{y \in X} \rho(x, y)$, gdzie $\rho(x, y)$ to

³² H. Steinhaus: W sprawie mierzenia długości linii krzywych płaskich. „Polski Przegląd Kartograficzny”, nr 37 styczeń 1932, s. 145–146. W swej kolejnej pracy zauważa on, że „Matematycznie to zjawisko tłumaczy się tym, że długość nie jest funkcjonalem ciągłym”, zaś „Pole jest funkcjonalem ciągłym: dwa kontury bliskie siebie zamykają pola mało się różniące, ale długości tych konturów mogą się różnić bardzo znacznie. Możemy np. w sąsiedztwie linii kolejowej Wrocław-Warszawa i nie dalej od niej jak o 1 km poprowadzić ścieżkę o długości 10 000 km” (H. Steinhaus: O długości krzywych..., op. cit., s. 2).

³³ H. Steinhaus: Length, shape and area. „Colloquium Mathematicum”, Vol. 3/1954, s. 8. Warto nadmienić, że stwierdzenie to znalazło się w pierwotnej wersji słynnego artykułu Mandelbrota o mierzeniu wybrzeży Wielkiej Brytanii (B. Mandelbrot: How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. „Science”, Vol. 156, No. 3775 May 1967, s. 636). Jak współcześnie wyjaśnia Mandelbrot, stało się tak wskutek zwrócenia mu uwagi przez Steinhaus (który był recenzentem wspomnianego artykułu) na prace autorstwa polskiego matematyka. W obecnie udostępnionej wersji tego artykułu cytat ten został usunięty z głównego tekstu i przeniesiony do komentarza, co autor uzasadnia słowami Alfreda Whiteheada: „Jak poucza nas historia nauki, zbliżyć się do prawdziwej teorii a uchwycić jej dokładne zastosowanie, to dwie różne rzeczy. Wszystko co istotne zostało powiedziane już wcześniej przez kogoś, kto jej nie odkrył” (za: B. Mandelbrot: How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. Annotations. http://users.math.yale.edu/mandelbrot/web_pdfs/howLongIsTheCoastOfBritain.pdf, s. 5). Mandelbrot uważa także, że fakt, iż owe prace Steinhaus pozostały praktycznie nieznanymi, należy w mniejszym stopniu przypisać temu, że „(...) nikt nie czyta polskich czasopism naukowych (...)”, a raczej domniemanemu brakowi poczucia ich wartości u samego autora, bowiem „Gdyby uznał on swoje dokonanie za godne szerszej uwagi, znalazłby sposób na opublikowanie go tam, gdzie nie zostałoby przeoczone” (B. Mandelbrot: How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. Annotations, s. 5). Analizując współczesne wydania dawniejszych prac Mandelbrota, trzeba zatem uwzględnić hołdowanie przezeń wspomnianej uprzednio zasadzie i być świadomym ewentualnych różnic pomiędzy publikacjami oryginalnymi a ich późniejszymi redakcjami.

³⁴ H. Steinhaus: O długości linii krzywych empirycznych. „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky”, Vol. 74, No. 4/1949, s. 303.

³⁵ H. Steinhaus: Length..., op. cit., s. 8. Trzeba zauważyć, że „Łuki o skończonej długości nazywamy *prostowalnymi*” (J. Perkal: O długości..., op. cit., s. 258).

³⁶ J. Perkal: On the ε -Length. „Bulletin de l’Académie Polonaise des Sciences”, Vol. 4, No. 7/1956, s. 401–402.

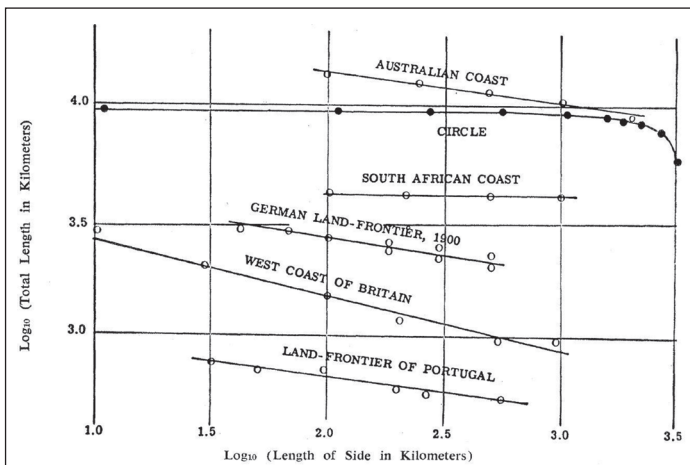
³⁷ J. Perkal: O ε -aureolach. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Prace Matematyczne”, No. 3/1959, s. 73.

odległość między punktami x i y . Jeżeli pole ε -aureoli oznaczyć jako $a_\varepsilon(X)$, to długością rzędu ε

Perkal nazywa wielkość $L_\varepsilon(X) = \frac{a_\varepsilon(X) - \pi\varepsilon^2}{2\varepsilon}$. Podstawową jej zaletą jest fakt, że jest ona funk-

cjonalą ciągłym, co pozwoliło na wyeliminowanie sytuacji, w których dwa bliskie sobie łuki mogą cechować się bardzo różnymi długościami. Dla celów praktycznych sugerował on także wykorzystanie „ ε -zgeneralizowanego brzegu” obszarów, co umożliwiło uproszczenie struktury łuków występujących w przyrodzie. Zarówno Perkal, jak i Steinhaus proponowali zatem ominięcie trudności związanych z istnieniem łuków nieprostowalnych poprzez posługiwanie się dla potrzeb praktycznych zdefiniowanymi przez siebie długościami. Podejście to, jak najbardziej celowe z utilitarystycznego punktu widzenia, miało znaczne zalety, jednak nie prowadziło do bardziej szczegółowego scharakteryzowania łuków nieprostowalnych. Odnośne badania podjął wspomniany już Richardson. Należy go uznać także za jednego z pierwszych badaczy analizujących występowanie zjawisk o charakterze fraktalnym w oparciu o dane empiryczne.

Richardson interesował się wieloma dziedzinami nauki (fizyką, matematyką, chemią czy biologią), choć stopień doktorski uzyskał w zakresie psychologii matematycznej³⁸. Najczęściej w chwili obecnej jego nazwisko jest przywoływane w związku z próbami przewidywania i kontrolowania pogody – w kontekście teorii chaotycznych układów dynamicznych³⁹. Wpływ tego uczonego na powstanie geometrii fraktalnej był jednak niemały – jego badania zawarte w pracy opublikowanej (pośmiertnie) w 1961 r. należy uznać za pierwsze zastosowanie jej narzędzi do badania obiektów i zjawisk świata rzeczywistego⁴⁰. Richardson analizował wpływ rozmaitych czynników na występowanie konfliktów pomiędzy różnymi społecznościami. W tym celu badał m.in. problem długości granic regionów. Analizując to zagadnienie, Richardson jako pierwszy przedstawił postać zależności opisującej wymierzoną długość krzywej od wielkości wykorzystanej podziałki: „Jej całkowita długość, $\sum \ell$, była rozpatrywana jako funkcja długości jej boku [tj. podziałki – przyp. R.B.], ℓ ”⁴¹.



Rys. 15. Zależność pomiędzy wielkością podziałki a oszacowaną za jej pomocą długością wybranych krzywych naturalnych wg Richardsona

Źródło: L. Richardson: The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. „General Systems of the Society for the Advancement of General Systems Today: Yearbook”, Vol. 6/1961, s. 169.

³⁸ B. Mandelbrot: The Fractal..., op. cit., s. 401.

³⁹ Por. np. I. Stewart: Czy..., op cit., s. 149–150.

⁴⁰ Wspomniane badania musiały zostać ukończone najpóźniej w roku 1953 (kiedy to Richardson zmarł). Za oczywistą omyłkę należy zatem uznać twierdzenie, jakoby „W 1961 roku Lewis Fry Richardson zamierzał zbadać, ile wynosi długość brzegu Wysp Brytyjskich” (J. Kudrewicz: Fraktale i chaos. WNT, Warszawa 2007, s. 57).

⁴¹ L. Richardson: The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. „General Systems of the Society for the Advancement of General Systems Today: Yearbook”, Vol. 6/1961, s. 168.

Dokonując stosownych obliczeń, Richardson uzyskał, że dla analizowanych przezeń krzywych rozważana funkcja jest funkcją potęgową, tj. $\sum \ell \propto \ell^{-\alpha}$. Dla różnych krzywych wartość współczynnika α była różna, co skłoniło angielskiego uczonego do wyciągnięcia wniosku, że może ona być traktowana jako charakterystyka danej krzywej: „Stała α wydaje się być dodatnio skorelowana z naszą wzrokową percepcją nieregularności granicy”⁴², przy czym dla $\alpha = 0$ dana krzywa jest zbliżona do łamanej, a jej wzrost świadczy o rosnącym stopniu nieregularności. (Zob. rys. 15, s. 21).

Prócz stwierdzenia występowania przedstawionej zależności, Richardson zwrócił także uwagę, że na ogół **określanie skończonej długości krzywej naturalnej jest nie do końca poprawne**. Podkreślił mianowicie, że „Proste mówienie o «długości» wybrzeża jest równoznaczne z poczynieniem nieuzasadnionego założenia. Kiedy ktoś twierdzi, że «przeszedł 10 mil wzdłuż wybrzeża», ma zazwyczaj na myśli, że przeszedł 10 mil w pobliżu wybrzeża”⁴³. Ze znalezionej przezeń zależności wynika bowiem, że dla $\alpha > 0$ zachodzi: $\lim_{\ell \rightarrow 0} \sum \ell = \infty$, tj. długość krzywej przy malejącej wielkości podziałki dąży do nieskończoności.

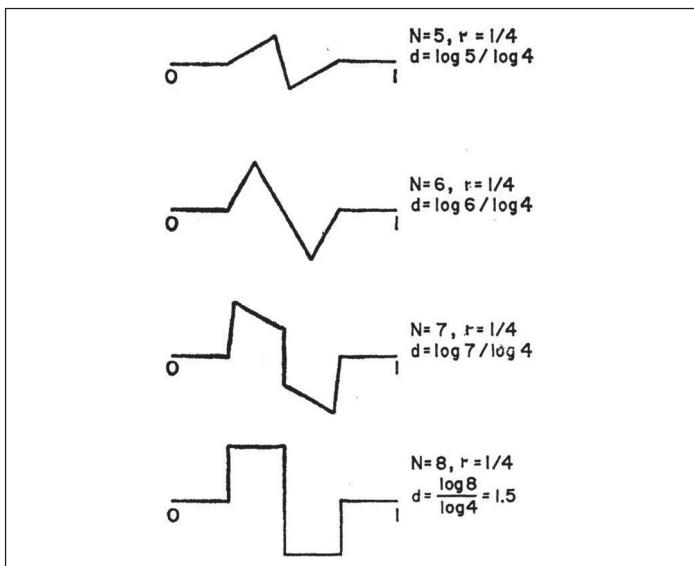
Rezultaty badań Richardsonska stały się jedną z inspiracji dla Mandelbrota w tworzeniu jego koncepcji modelowania fraktalnego. Zauważył on mianowicie, że krzywe opisujące wybrzeża czy granice państw są „(...) **statystycznie «samopodobne», tzn. że dowolny fragment może być traktowany jako pomniejszona kopia całości**”⁴⁴. W ten sposób Mandelbrot sformułował jedną z kluczowych cech decydujących o sklasyfikowaniu obiektu jako fraktala – samopodobieństwo. W odniesieniu do obiektów występujących jedynie w ujęciu teoretycznym, jak np. krzywa von Kocha, można bowiem mówić o ich samopodobieństwie (dokładnym). W odniesieniu do obiektów naturalnych niezbędne jest uwzględnienie wpływu losowości na ich kształt, stąd też konieczność uogólnienia samopodobieństwa dokładnego na samopodobieństwo statystyczne. Prócz opisanej cechy Mandelbrot uznał także, że wspomniane krzywe można syntetycznie scharakteryzować za pomocą pojedynczej liczby – wykładnika samopodobieństwa D , który można traktować jak wymiar. Jednocześnie zaproponował on odmienną wersję zależności przedstawionej przez Richardsonska, daną jako $L(G) \sim G^{1-D}$, gdzie G oznacza wielkość podziałki, a $L(G)$ – oszacowaną długość krzywej przy wielkości podziałki G . Mandelbrot zamiast rozważanego przez Richardsonska parametru α skłania się do wykorzystania stałej D ze względu na możliwość interpretowania jej jako wymiaru krzywej. Ponadto Mandelbrot przedstawił sposób konstruowania krzywych nieprostowalnych o zadanym wymiarze (tj. parametrze D). W tym celu systematycznie zastępuje on każdy z odcinków składających się na otrzymaną w poprzednim kroku łamaną (rozpoczynając od pojedynczego odcinka) odpowiednio pomniejszoną kopią łamanej o konstrukcji stosownej do żadanego wymiaru. Kontynuując to postępowanie *ad infinitum* w granicy uzyskuje on krzywe nieprostowalne o z góry określonym wymiarze D . Idea przedstawionej przezeń metody została zaprezentowana na rys. 16, s. 23.

Dotychczas przedstawione rezultaty badań nie powstały jako efekt zainteresowania geometrią fraktalną i jej zastosowaniami, lecz pojawiły się wskutek analizy innych problemów naukowych. Z tego też względu o okresie trwającym do lat siedemdziesiątych XX wieku należy raczej mówić jako o okresie poprzedzającym pojawienie się idei geometrii fraktalnej. Koncepcja ta została w pełni przedstawiona dopiero w 1975 r. przez Mandelbrota w publikacji pt. *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*, przetłumaczonej następnie i wydanej w zmienionej i poszerzonej wersji pt. *The Fractal Geometry of Nature*. Jej autor przedstawił w niej zbiorczo informacje o teoretycznych podstawach geometrii fraktalnej. Wpływ tej publikacji wynikał także z faktu zawarcia

⁴² Ibid., s. 170.

⁴³ Ibid.

⁴⁴ B. Mandelbrot: How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Op. cit., s. 636.



Rys. 16. Idea generowania krzywych nieprostowalnych o zadanym wykładniku samopodobieństwa wg Mandelbrota

Źródło: B. Mandelbrot: How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. „Science”, Vol. 156, No. 3775 May 1967, s. 637.

w niej przykładów aplikacji analizy opartej na założeniu o fraktalnym charakterze badanych obiektów w wielu całkowicie różnych dziedzinach nauki: m.in. w astronomii, hydrologii czy nawet w naukach społecznych. Stąd też przez wielu wspomniana monografia została uznana za dzieło mające fundamentalne znaczenie dla powstania i rozwoju geometrii oraz wiedzy uczonych o geometrii fraktalnej. W niej także zawarto pierwszą definicję obiektu fraktalnego. W celu jej przedstawienia oraz rozważenia, czy można uznać ją za uniwersalną, a także zbadania jej przydatności w modelowaniu cen instrumentów finansowych i procesie oceny ryzyka inwestycyjnego, w relacji do określeń konkurencyjnych, niezbędne jest wprowadzenie pewnych określeń matematycznych. Zostaną one zaprezentowane w następnym punkcie.

1.2. Pojęcie wymiaru w geometrii fraktalnej

Jednym z kluczowych pojęć wykorzystywanych do charakteryzowania obiektów fraktalnych (lub nawet do ich definiowania) jest pojęcie wymiaru. W ubiegłym wieku powstało wiele definicji wymiaru, stworzono także teorie matematyczne poświęcone tym zagadnieniom. Niezwykła użyteczność ujęcia fraktalnego i w konsekwencji zastosowanie go w analizie zjawisk będących przedmiotem badań najodleglejszych dyscyplin sprawiła, że pojęciem wymiaru fraktalnego zaczęto określać najrozmaitsze wymiary, często definiowane w całkowicie odmienny sposób i przyjmujące różne wartości dla tego samego obiektu. Zaistniały chaos pojęciowy, naturalny w przypadku nowo powstałych koncepcji, nie zaniknął i nadal w publikacjach naukowych panuje pewna dowolność w posługiwaniu się odnośnym określeniem⁴⁵. Fakt ten skłonił nawet samego Mandelbrota do (jak skonstratował w kolejnym wydaniu *The Fractal Geometry of Nature*) „(...) pozostawienia terminu

⁴⁵ Przyczyną tego stanu rzeczy jest także fakt, że dla niektórych obiektów fraktalnych różne wymiary fraktalne przybierają tę samą wartość. Jest to jednak raczej odstępstwem od reguły niż ogólną prawidłowością (zob. np. A. Gabryś: Rynek kapitałowy w ujęciu fraktalnym. Aurea Mediocritas, Warszawa 2005).

«fraktal» bez ścisłej definicji i wykorzystania «wymiaru fraktalnego» jako ogólnego terminu mającego zastosowanie do *wszystkich* wariantów (...)»⁴⁶. Tym niemniej celowe wydaje się przedstawienie najczęściej wykorzystywanych, a jednocześnie mogących mieć zastosowanie w badaniu finansowych szeregów czasowych określeń wymiaru.

1.2.1. Wymiar topologiczny

Intuicyjnie najprostszym (choć niekoniecznie z formalnego punktu widzenia) wymiarem jest **wymiar topologiczny**. Stwierdzenie, że odcinkowi należy przypisać wymiar 1, kwadratowi – 2, a sześcianowi – 3, wydaje się oczywiste. W tym przypadku można bowiem powiedzieć, że wymiarem jest liczba zmiennych niezbędnych do pełnego opisanego punktów wspomnianych zbiorów. Konstatacja ta nie jest jednak wystarczająca, o czym przekonano się, gdy Cantor dowiódł, że odcinek i kwadrat są zbiorami o równej mocy. Rozwiązanie tego problemu stało się tym bardziej konieczne po przedstawieniu opisaną uprzednio krzywej Peano, tj. odwzorowania ciągłego odcinka jednostkowego na kwadrat jednostkowy. Sugestię, w jaki sposób należy tego dokonać, sformułował Poincaré – w jego ujęciu wymiar winien zostać zdefiniowany indukcyjnie. I tak, prosta powinna mieć wymiar 1, można bowiem dokonać jej rozcięcia, wykorzystując punkt – obiekt o wymiarze równym zero. Podobnie, obiekt jednowymiarowy (linia) umożliwi rozcięcie płaszczyzny – zbioru o wymiarze 2, itd. Należy także zauważyć, że określenie „wymiar topologiczny” obejmuje *de facto* różne rodzaje wymiaru. Formalnie rzecz ujmując, przestrzeń topologiczną, tj. „(...) zbiór X , w którym każdemu zbiorowi $A \subset X$ przyporządkowany został zbiór $\bar{A} \subset X$ (zwany *domknięciem zbioru A*) spełniający cztery następujące warunki (zwane *aksjomatami domknięcia*): (I) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, (II) $A \subset \bar{A}$, (III) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$, (IV) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ”⁴⁷ można bowiem scharakteryzować trzema wymiarami: małym indukcyjnym (Menger-Urysohna), dużym indukcyjnym (Brouwera-Čecha) oraz pokryciowym (Čecha-Lebesgue’a). W dalszej części pracy przedmiotem zainteresowania będą wyłącznie podzbiory przestrzeni \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, praktycznie jedynie dla $n = 2$. Ponieważ w tym przypadku wszystkie wspomniane wymiary przyjmują jednakową wartość, zatem poniżej zostanie przedstawiona formalna definicja małego wymiaru indukcyjnego (ze względu na tradycyjne znaczenie tego wymiaru⁴⁸), oddająca ideę Poincarégo.

Małym wymiarem indukcyjnym przestrzeni metrycznej X nazywamy liczbę całkowitą nie mniejszą niż -1 (względnie „liczbę nieskończoną” ∞) określoną w następujący sposób:

„(MU1) $\text{ind } X = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \emptyset$.

(MU2) $\text{ind } X \leq n \geq 0$, gdy dla każdego punktu $x \in X$ i jego dowolnego otoczenia $V \subset X$ istnieje zbiór otwarty $U \subset X$, taki, że $x \in U \subset V$ oraz $\text{ind Fr } U \leq n - 1$.

(MU3) $\text{ind } X = n$, gdy $\text{ind } X \leq n$ oraz $\text{ind } X > n - 1$, tj. nie zachodzi nierówność $\text{ind } X \leq n - 1$.

(MU4) $\text{ind } X = \infty$, gdy $\text{ind } X > n$ dla $n = -1, 0, 1, \dots$ ”⁴⁹.

Kluczowe znaczenie dla możliwości zastosowania wymiaru fraktalnego jako charakterystyki obiektów geometrycznych ma twierdzenie, głoszące, że wymiar topologiczny przestrzeni

⁴⁶ B. Mandelbrot: *The Fractal...*, op. cit., s. 459.

⁴⁷ K. Kuratowski: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. PWN, Warszawa 1977, s. 110.

⁴⁸ R. Engelking: *Teoria wymiaru*. PWN, Warszawa 1977, s. 5.

⁴⁹ *Ibid.*, s. 9.

homeomorficznych⁵⁰ jest równy: „Obraz topologiczny zbioru n-wymiarowego jest n-wymiarowy”⁵¹. Wynika z niego, że wymiar topologiczny tak odmiennych obiektów jak odcinek i trójkąt Sierpińskiego jest ten sam. Wymiar topologiczny nie może zatem być traktowany jako miara użyteczna w różnicowaniu obiektów fraktalnych, jako że (jak wskazuje przytoczony przykład) klasy tworów geometrycznych o tym samym wymiarze topologicznym są zbyt pojemne. Z tego też względu zaistniała konieczność stworzenia definicji wymiaru, który byłby tej wady (przynajmniej częściowo) pozbawiony.

1.2.2. Wymiar Hausdorffa

Jedna z udanych prób stworzenia nowej definicji wymiaru umożliwiającego wierniejsze oddanie zróżnicowania obiektów geometrycznych została podjęta przez matematyka niemieckiego **Felixa Hausdorffa** w 1919 r. Wymiar ten posłużył początkowo Mandelbrotowi do zdefiniowania pojęcia fraktala.

W celu podania definicji wymiaru nazwanego na cześć jego twórcy wymiarem Hausdorffa należy w pierwszej kolejności określić, czym jest miara Hausdorffa⁵². Dla dowolnego podzbioru X przestrzeni metrycznej \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, rozważamy jego δ -pokrycie ($\delta > 0$), tj. co najwyżej przeliczalną rodzinę $\{U_i\}$ podzbiorów \mathbb{R}^n , taką że $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ oraz dla każdego i $0 \leq |U_i| \leq \delta$, gdzie $|U_i|$ oznacza średnicę zbioru U_i (czyli $|U_i| = \sup_{x,y \in U_i} \{d(x,y)\}$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$). Następnie dla nieujemnej liczby s określamy wielkość:

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i; 0 \leq |U_i| \leq \delta, i = 1, 2, 3, \dots \right\},$$

przy czym jeżeli $U_i = \emptyset$, to przyjmujemy⁵³, że $|U_i|^0 = 0$. Jest ona kresem dolnym sum średnic podniesionych do s -tej potęgi zbiorów stanowiących δ -pokrycie zbioru X . Przez s -wymiarową miarę Hausdorffa zbioru X rozumiemy granicę:

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(X).$$

Jest ona uogólnieniem pojęć takich jak długość, powierzchnia czy objętość, a dla rozważanych przestrzeni \mathbb{R}^n jest im równa z dokładnością do mnożenia przez stałą (zależną od n). Można pokazać, że istnieje dokładnie jedna wartość s (oznaczymy ją tymczasowo jako s_0), dla której zachodzi:

$$\lim_{s \rightarrow s_0^+} \mathcal{H}^s(X) = 0$$

oraz

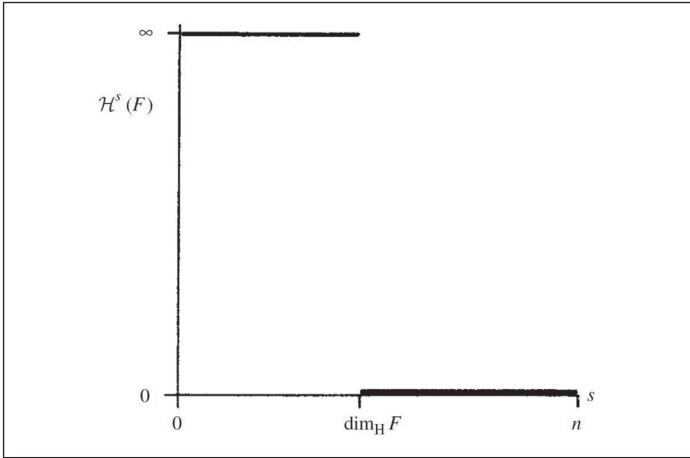
$$\lim_{s \rightarrow s_0^-} \mathcal{H}^s(X) = \infty.$$

⁵⁰ Z definicji „Jeśli przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ jest ciągłe i różnowartościowe i jeśli przekształcenie odwrotne $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ jest ciągłe, to f nazywamy homeomorfizmem” (K. Kuratowski: Op. cit., s. 134).

⁵¹ K. Menger: What is Dimension? „The American Mathematical Monthly”. Vol. 50, No. 1 January 1943, s. 6.

⁵² Za: K. Falconer: Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, Chichester 2003, s. 27 i dalsze.

⁵³ M. Barnsley: Fractals Everywhere. Academic Press, Boston et al. 1988, s. 200.



Rys. 17. S-wymiarowa miara Hausdorffa obiektu F w zależności od s

Źródło: K. Falconer: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester 2003, s. 31.

Wartość s_0 , dla której następuje nieskończony ujemny skok miary Hausdorffa, nazywamy **wymiarem Hausdorffa** (lub **Hausdorffa-Besicovitcha**) obiektu X :

$$\dim_H X = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\}.$$

Dla obiektów takich jak punkty, proste czy inne „standardowe” figury geometryczne wymiar ten jest równy wymiarowi topologicznemu. Dla obiektów takich jak np. zbiór Cantora przyjmuje on wartości większe niż wymiar topologiczny – w przypadku zbioru Cantora wyraża się liczbą niewymierną⁵⁴ i wynosi $\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Klasy tworów o tym samym wymiarze Hausdorffa są zdecydowanie mniej pojemne niż w przypadku wymiaru topologicznego. Umożliwia on zatem zdecydowanie bardziej precyzyjne odróżnianie obiektów o odmiennych własnościach geometrycznych. O ile bowiem w przypadku wymiaru topologicznego punkt był nieodróżnialny od zbioru Cantora (ich wymiar topologiczny wynosi zero), o tyle w przypadku wymiaru Hausdorffa wynosi odpowiednio 0 i $\frac{\ln 2}{\ln 3}$, co wskazuje na ich całkowicie odmienny charakter.

Bardziej kompleksowe informacje o analizowanym obiekcie można otrzymać, posługując się w definicji miary Hausdorffa zamiast funkcją $h(t) = t^s$ dowolną funkcją rosnącą i ciągłą $h: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$:

$$\mathcal{H}_\delta^h(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|U_i|) : X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i; 0 \leq |U_i| \leq \delta, i = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Wtedy:

$$\mathcal{H}^h(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(X).$$

Klasyfikacja funkcji na te, dla których $\mathcal{H}^h(X) < \infty$, oraz te, dla których $\mathcal{H}^h(X) = \infty$, umożliwia dogłębnierze określenie natury danego tworu geometrycznego, choć jednocześnie podejście to utrudnia porównywanie obiektów, jako że w tej sytuacji dany obiekt jest charakteryzowany nie

⁵⁴ Należy nadmienić, że choć wymiar fraktalny (z łac. *fractus* – złamany) bywa nazywany ułamkowym (z ang. *fractional dimension*), to jednak, jak widać na przykładzie zbioru Cantora, może on być wyrażony liczbą niewymierną (której przedstawienie w postaci ułamka jest niemożliwe) bądź całkowitą. Jest to jeden z powodów, dla których Mandelbrot preferuje określenie wymiar fraktalny (*fractal dimension*).

pojedynczą liczbą, lecz rodziną funkcji. Dlatego też najczęściej stosowane jest odwzorowanie $h(t) = t^s$ i wymiar Hausdorffa.

Kłopotem w posługiwaniu się wymiarem Hausdorffa jest to, że jego skalkulowanie nawet dla (wydawałoby się) stosunkowo nieskomplikowanych obiektów jest zazwyczaj bardzo trudne. Co więcej, jest ono praktycznie niemożliwe dla obiektów niebędących tworam abstrakcyjnymi, lecz naturalnymi. Z tego też względu, mimo zalet opisywanego podejścia, w badaniach empirycznych wykorzystywane są inne rodzaje wymiaru.

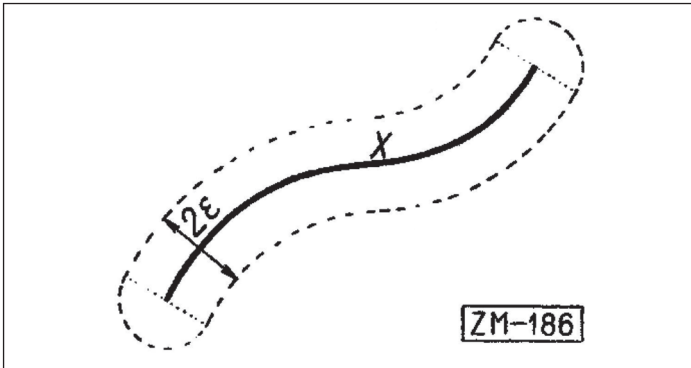
1.2.3. Wymiar pudełkowy

Idea **wymiaru pudełkowego** (*box dimension*) wywodzi się z prac Minkowskiego z początku ubiegłego wieku. Dla „standardowych” obiektów geometrycznych jest równy wymiarowi topologicznemu. Dzięki Georgesowi Bouligandowi okazało się, że może on przyjmować także wartości niecałkowite. Z tego też względu bywa nazywany **wymiarem Minkowskiego-Bouliganda**. W zależności od sposobu zdefiniowania jest także określany mianem wymiaru pudełkowego, pojemnościowego, entropią Kołmogorowa bądź wymiarem entropijnym⁵⁵.

Definicja wymiaru pudełkowego dla podzbioru X przestrzeni \mathbb{R}^n pochodząca od Minkowskiego i Bouliganda jest następująca:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(n - \frac{\ln a_\varepsilon^n(X)}{\ln \varepsilon} \right),$$

gdzie $a_\varepsilon^n(X)$ jest objętością n -wymiarowej ε -aureoli (zwanej także pokryciem Minkowskiego zbioru X)⁵⁶.



Rys. 18. Pokrycie Minkowskiego zbioru X

Źródło: J. Perkal: O długości krzywych empirycznych. „Zastosowania matematyki”, nr 3/1957, s. 263.

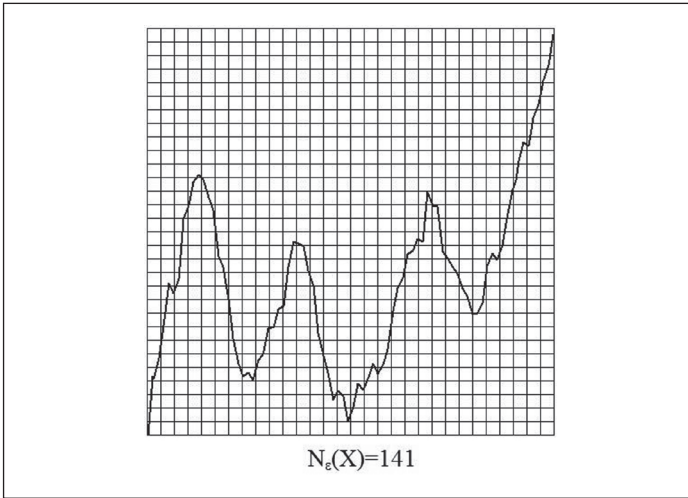
⁵⁵ Wspomniana różnorodność terminologiczna prowadzi często do nieporozumień – myląco bywa on czasem nazywany wymiarem Hausdorffa (zob. np. W. Kinsner: *A Unified Approach To Fractal Dimensions*. „International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence”. Vol. 1, No. 4 October-December 2007, s. 32). W literaturze polskiej bywają wykorzystywane wszystkie określenia – wymiar pudełkowy jest nazywany zarówno pojemnością Kołmogorowa (H. Zawadzki: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 1996, s. 137), jak i wymiarem pojemnościowym (A. Mastalerz-Kodzis: *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2003, s. 22). W niniejszej pracy konsekwentnie będzie mowa o wymiarze pudełkowym bądź Minkowskiego-Bouliganda, bowiem „(...) należy unikać pokusy określania wymiaru [pudełkowego – przyp. R.B.] (...) mianem wymiaru pojemnościowego” ze względu na „(...) całkowicie odmienne, starsze i lepiej uzasadnione znaczenie tego określenia w teorii potencjału” (B. Mandelbrot: *The Fractal...*, op. cit., s. 359).

⁵⁶ B. Dubuc, J. Quiniou, C. Roques-Carnes, C. Tricot, S. Zucker: Evaluating the fractal dimension of profiles. „Physical Review A”, Vol. 39, No. 3 February 1989, s. 1501.

Definicją ekwiwalentną, częściej stosowaną ze względu na łatwiejsze przeprowadzanie obliczeń dla obiektów empirycznych, jest definicja następująca:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

gdzie $N_\varepsilon(X)$ jest liczbą hipersześcianów siatki o boku ε mających co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem X . Poszukiwanie wymiaru pudełkowego sprowadza się zatem do odnalezienia takiej wielkości D dla której wyrażenia $N_\varepsilon(X)$ oraz ε^{-D} dla $\varepsilon \rightarrow 0$ są tego samego rzędu. Dla przykładowego podzbioru X przestrzeni \mathbb{R}^2 (będącego wykresem pewnej funkcji) oraz pewnego ε ideę kalkulowania $N_\varepsilon(X)$ przedstawiono poniżej.



Rys. 19. Przykładowa siatka kwadratowa oraz $N_\varepsilon(X)$ dla danego ε oraz zbioru X

Źródło: R. Buła: Aspekty metodyczne szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. [W:] Młodzi naukowcy dla polskiej nauki. Cz. IX. Tom II. Creativetime, Kraków 2012, s. 194.

Można udowodnić, że zamiast zliczania hipersześcianów siatki o boku ε , mających co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem X , można przez $N_\varepsilon(X)$ rozumieć:

- a) najmniejszą liczbę kul o promieniu ε ,
- b) najmniejszą liczbę hipersześcianów o boku ε ,
- c) najmniejszą liczbę zbiorów o średnicy co najwyżej ε ,
- d) największą liczbę rozłącznych kul o promieniu ε o środkach należących do X , pokrywających zbiór X ⁵⁷. Wybór sposobu kalkulowania wymiaru pudełkowego jest *de facto* uzależniony od stopnia prostoty danego podejścia dla analizowanego obiektu geometrycznego.

Wymiar pudełkowy pokazuje, jak zachowuje się badany obiekt w sytuacji malejących (w granicy do zera) rozmiarów pokrywających go hipersześcianów. Mankamentem pojawiającym się przy stosowaniu wymiaru pudełkowego jest fakt, że nie dla wszystkich obiektów geometrycznych jest

on dobrze określony – nie dla wszystkich zbiorów istnieje bowiem granica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$. W tej sytuacji można posłużyć się wielkościami zawsze istniejącymi, tj. dolnym i górnym wymiarem pudełkowym. Dolny wymiar pudełkowy jest definiowany jako:

$$\underline{\dim}_B(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

⁵⁷ K. Falconer: Fractal..., op. cit., s. 43.

natomiast górny wymiar pudełkowy jako:

$$\overline{\dim}_B(X) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Jeżeli granice te są takie same, to istnieje wówczas wymiar pudełkowy zbioru X i jest im równy. W przeciwnym wypadku wymiar pudełkowy nie jest określony, a wielkością najczęściej wykorzystywaną w tej sytuacji jest dolny wymiar pudełkowy.

Zaletą posługiwania się wymiarem pudełkowym jest relatywna prostota jego kalkulowania, zwłaszcza w odniesieniu do obiektów rzeczywistych, co w tym względzie stanowi o jego przewadze nad wymiarem Hausdorffa. Mimo to cechuje się on pewnymi niedogodnościami, które z formalnego punktu widzenia czynią uzyskiwane wyniki mniej użytecznymi, niż gdyby posługiwać się wymiarem Hausdorffa. Do najistotniejszych należy własność mówiąca, że wymiar pudełkowy (także górny i dolny) pewnego zbioru jest równy wymiarowi pudełkowemu (górnemu i dolnemu) domknięcia tego zbioru⁵⁸. Ponadto o ile wymiar pudełkowy zbioru złożonego z pojedynczej liczby rzeczywistej wynosi zero⁵⁹, to jednak wymiar pudełkowy zbioru $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ wynosi $\frac{1}{2}$. Niedogodności te można usunąć, korygując definicję wymiaru pudełkowego, co prowadzi do określenia zmodyfikowanego wymiaru pudełkowego. Jest on jednak znacznie trudniejszy do oszacowania, co sprawia, że w niniejszej pracy ze względu na jego niewielką przydatność w dalszych rozważaniach nie będzie on analizowany.

1.2.4. Wymiar cyrkłowy

Koncepcja **wymiaru cyrkłowego** (*divider dimension*) została przedstawiona przez Mandelbrota w 1967 r. w związku z analizą długości wybrzeża Wysp Brytyjskich. Ma ona zastosowanie do badania struktury krzywych nieprzecinających się i jest naturalnym rozwinięciem metody analizy stopnia skomplikowania tworów geometrycznych z wykorzystaniem współczynnika α Richardsona.

W celu określenia wymiaru cyrkłowego krzywej X o końcach a i b w pierwszym etapie należy oznaczyć na niej kolejne punkty $x_0 = a, x_1, \dots, x_m$, takie że odległość między kolejnymi z nich wynosi dokładnie $\varepsilon > 0$. Maksymalną liczbę punktów pomniejszoną o jeden oznaczamy przez $M_\varepsilon(X)$, zaś długość uzyskanej łamanej⁶⁰ jako $L_\varepsilon(X) = M_\varepsilon(X)\varepsilon$. Wymiarem cyrkłowym nazywamy wówczas granicę (jeśli istnieje):

$$\dim_D(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

bądź ekwiwalentnie:

$$\dim_D(X) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

⁵⁸ Ibid., s. 48.

⁵⁹ Zob. A. Górski: Pseudofractals and box counting algorithm. „Journal of Physics A: Mathematical and General”, Vol. 34, No. 39 October 2001, s. 2–3 oraz A. Górski: Comment on fractality of quantum mechanical energy spectra. <http://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9804034v1.pdf>, s. 2.

⁶⁰ Richardson postuluje uwzględnienie także odległości (jeżeli jest dodatnia) pomiędzy punktem x_m a właściwym końcem krzywej, kalkulując $L_\varepsilon(X) = M_\varepsilon(X)\varepsilon + d(x_m, b)$ (L. Richardson: Op. cit., s. 168). Ponadto należy zauważyć, że kalkulacje dotyczące obiektów geograficznych są na ogół wykonywane w oparciu o mapy, co może zniekształcać wyniki w związku z koniecznością stosowania odpowiednich odwzorowań kartograficznych.

Analogicznie do górnego i dolnego wymiaru pudełkowego można także zdefiniować górny i dolny wymiar cyrkłowy jako odpowiednio:

$$\underline{\dim}_D(X) = 1 + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\overline{\dim}_D(X) = 1 + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Z przedstawionych określeń widać doskonale różnicę pomiędzy łukami prostawalnymi a nieprostawalnymi. Ponieważ dla łuków prostawalnych zachodzi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(X) < \infty$, zatem $\dim_D(X) = 1$.

Z punktu widzenia charakterystyki, jaką jest wymiar cyrkłowy, wszystkie one stanowią jedną klasę obiektów. Nie jest jednak prawdą, że łuki nieprostowalne stanowią drugą klasę obiektów – jeżeli bowiem $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(X) = \infty$, wówczas granica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ nie musi być taka sama. W zależności od zachowania $L_\varepsilon(X)$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, uzyskamy różne wymiary cyrkłowe – w relacji do stopnia skomplikowania analizowanej krzywej. Wymiar cyrkłowy należy zatem uznać za kolejną użyteczną charakterystykę łuków nieprostawalnych.

1.2.5. Wymiar samopodobieństwa

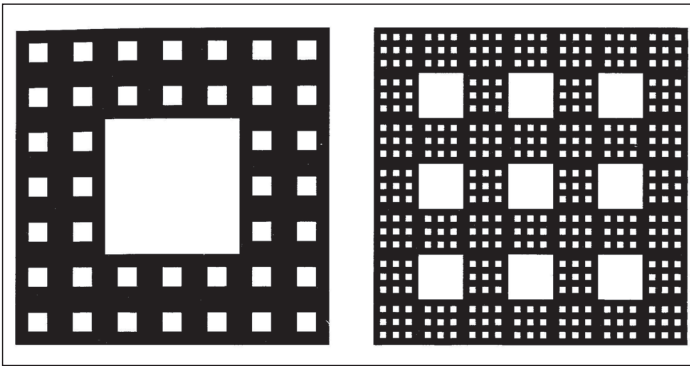
Wymiar samopodobieństwa ma zastosowanie w odniesieniu do zbiorów określanych jako samopodobne. Zbiór samopodobny można nieformalnie określić jako zbiór składający się z pomniejszonych rozłącznych kopii samego siebie. Zbiorem samopodobnym jest np. trójkąt Sierpińskiego – który można traktować jako złożony z trzech swoich kopii pomniejszonych w stosunku 1:2. Formalne zdefiniowanie obiektów samopodobnych w przestrzeni \mathbb{R}^n wymaga określenia przekształcenia zwężającego, które dla n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest definiowane⁶¹ jako odwzorowanie $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, takie że istnieje stała $0 < c < 1$, że dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$. Jeżeli z kolei dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, to przekształcenie to nazywamy podobieństwem zwężającym, zaś stałą c – stałą podobieństwa. Rodzina odwzorowań zwężających $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, $2 \leq m < \infty$ o stałych zwężania c_1, c_2, \dots, c_m jest nazywana układem iterowanych odwzorowań (*iterated function system*, IFS). Dla układu iterowanych odwzorowań istnieje dokładnie jeden niepusty zwarty podzbiór X przestrzeni \mathbb{R}^n , taki że $X = \bigcup_{i=1}^m S_i(X)$. Zbiór X jest zbiorem niezmienniczym danego

IFS i jest nazywany atraktorem układu. Jeżeli dodatkowo założyć, że analizowane przekształcenia są podobieństwami zwężającymi oraz istnieje niepusty, ograniczony i otwarty zbiór V , taki że $\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$ oraz $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, to wówczas atraktor układu iterowanych odwzorowań nazywamy samopodobnym. Samopodobieństwo to jest ściśle, jeżeli wszystkie stałe zwężania są sobie równe. Wtedy pomniejszenie każdej kopii, z których składa się zbiór, jest takie samo, podczas gdy w poprzednio omawianym przypadku tak być nie musiało.

⁶¹ Za: K. Falconer: *Fractal...*, op.cit., s. 123 i dalsze.

Wymiarem samopodobieństwa dla zbioru samopodobnego X nazywa się taką liczbę $\dim_s(X)$, która spełnia równość $\sum_{i=1}^m c_i^{\dim_s(X)} = 1$ (istnieje dokładnie jedna). W odniesieniu do zbiorów ściśle samopodobnych, tj. takich że $c_1 = c_2 = \dots = c_m = c$, równość powyższa przybiera postać $mc^{\dim_s(X)} = 1$, skąd $\dim_s(X) = \frac{\ln m}{\ln \frac{1}{c}}$. Przykładowo, dla trójkąta Sierpińskiego układ iterowanych odwzorowań stanowi rodzina trzech podobieństw zwięzających o równych stałych zwięzania wynoszących $\frac{1}{2}$. Dlatego też wymiar samopodobieństwa tego obiektu wynosi $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58$.

Wymiar samopodobieństwa można uznać za miarę stopnia skomplikowania analizowanej samopodobnej struktury geometrycznej, zwłaszcza że traktowany jako wymiar atraktora jest on równy wymiarowi Hausdorffa i pudełkowemu. Mimo to klasyfikacja obiektów samopodobnych ze względu na wymiar samopodobieństwa nie dostarcza wystarczających informacji do pełnego opisania analizowanych zbiorów. Zbiory samopodobne o tym samym wymiarze mogą istotnie różnić się od siebie. Przykładu dostarczył Mandelbrot, konstruując dwa zbiory samopodobne o wymiarze $\frac{\ln 40}{\ln 7} \approx 1,90$ o odmiennych rozmiarach i układzie przestrzeni niewypełnionych punktami atraktora.



Rys. 20. Zmodyfikowane dywany Sierpińskiego o wymiarze samopodobieństwa $\frac{\ln 40}{\ln 7} \approx 1,90$ i odmiennych konstrukcji

Źródło: B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman & Company, New York 1983, s. 318.

Mimo przedstawionych mankamentów wymiar samopodobieństwa pozwala uzyskać pewną dozę informacji o badanym obiekcie (choć nie umożliwia ona dokonania jego pełnej charakterystyki).

1.2.6. Podsumowanie

Przedstawione w niniejszym punkcie wymiary: topologiczny oraz różne odmiany wymiaru nazywanego fraktalnym, jakkolwiek niewyczerpujące całego spektrum wielkości wykorzystywanych w analizie fraktalnej, wraz z pojęciami towarzyszącymi są składnikami znacznej liczby określeń konstytuujących istotę obiektów o charakterze fraktalnym. Prowadząc dalsze analizy, nie można jednak zapominać, że wymiary określone wspólnym mianem „fraktalnych” stanowią (jak starano się wykazać) grupę zdecydowanie heterogeniczną.

Omawiane dotychczas wymiary fraktalne nie zawsze przyjmują takie same wartości – wydaje się raczej, że jest to wyjątkiem niż regułą. Z tego względu autor uznał za celowe przedstawić nie zależności zachodzących pomiędzy poszczególnymi wymiarami. Postępowanie to jest o tyle

uzasadnione, że dodatkowo pozwala spojrzeć na nie jak na odmienne charakterystyki tego samego obiektu. Ponadto prezentowane relacje pełnią rolę sprawdzającą – umożliwiają one wykrycie ewentualnych błędów w szacowaniu czy obliczaniu wymiarów.

Podstawową zależnością, którą należy przytoczyć, jest relacja pomiędzy wymiarem topologicznym, Hausdorffa a pudełkowym. Zachodzi bowiem następujący związek:

$$\dim_T(X) \leq \dim_H(X) \leq \underline{\dim}_B(X) \leq \overline{\dim}_B(X),$$

a zatem jeżeli wymiar pudełkowy istnieje, to $\dim_T(X) \leq \dim_H(X) \leq \dim_B(X)$. Wymiar Hausdorffa jest zatem nie większy od wymiaru pudełkowego, a jednocześnie nie mniejszy od wymiaru topologicznego. Konstatacja ta posłuży następnie Mandelbrotowi do zdefiniowania obiektów fraktalnych.

W przypadku krzywych i szacowania ich wymiaru cyrklowego i pudełkowego (jeśli istnieją) można pokazać, że $\dim_B(X) \leq \dim_D(X)$. Widać zatem, że wymiary te nie są ekwiwalentne.

Tab. 1. Najistotniejsze zalety i wady najczęściej wykorzystywanych wymiarów w analizie obiektów fraktalnych

Wymiar	Zalety	Wady
Hausdorffa	<ul style="list-style-type: none"> • odzwierciedla złożoną strukturę geometryczną obiektu 	<ul style="list-style-type: none"> • trudny do obliczenia bądź oszacowania
Pudełkowy	<ul style="list-style-type: none"> • nieskomplikowana procedura obliczeniowa • łatwy w interpretacji 	<ul style="list-style-type: none"> • może przyjmować wartości niecałkowite dla obiektów niebędących fraktalami
Cyrklowy	<ul style="list-style-type: none"> • nieskomplikowana procedura obliczeniowa • łatwy w interpretacji 	<ul style="list-style-type: none"> • nie ma zastosowania do obiektów innych niż krzywe
Samopodobieństwa	<ul style="list-style-type: none"> • nieskomplikowana procedura obliczeniowa • dostateczna charakterystyka obiektów samopodobnych 	<ul style="list-style-type: none"> • nie ma zastosowania do obiektów innych niż samopodobne

Źródło: Opracowanie własne.

Kluczową cechą omawianych wymiarów jest fakt, że wszystkie starają się uchwycić stopień nieregularności badanych twórców. W zależności jednak od tego, jak rozumieć pojęcie „nieregularność” oraz jak ją mierzyć, uzyskuje się odmienne rezultaty. W analizie teoretycznej chyba najczęściej wykorzystywany jest wymiar Hausdorffa, zaś w zastosowaniach praktycznych powszechnie stosuje się wymiar pudełkowy. Z tego też względu w niniejszej pracy odniesienie do wymiaru fraktalnego będzie na ogół oznaczało odwołanie się do wymiaru pudełkowego. Dodatkowego uzasadnienia dla wykorzystania właśnie wymiaru pudełkowego dostarcza ponadto możliwość nadania mu czytelnej interpretacji ekonomicznej, co jest przedmiotem rozważań zawartych w dalszej części monografii⁶².

⁶² Zob. punkt 2.2.1.

1.3. Krytyczna analiza współczesnych definicji obiektu fraktalnego

Dla rozważań o własnościach fraktalnych obiektów kluczowy jest sposób zdefiniowania fraktala. Kwestia skonstruowania właściwej i powszechnie akceptowanej definicji tworów fraktalnych, mimo podania odpowiednich określeń przez wielu uczonych, nie została do chwili obecnej uznana za zamkniętą, a problem znalezienia adekwatnych kryteriów klasyfikacyjnych za satysfakcjonująco rozwiązany. Aktualnie w literaturze przedmiotu częściej spotyka się opis cech, którymi powinny wykazywać się fraktale, lecz na ogół są one celowo formułowane w sposób pozwalający na arbitralne włączenie bądź wykluczenie poszczególnych obiektów z wyróżnionych klas. Z tego też względu autor uznał za celowe porównanie rozmaitych definicji tworów fraktalnych, jednocześnie pokusiwszy się o próbę dokonania oceny ich użyteczności z punktu widzenia ekonomisty.

Jedną z najprostszych **definicji obiektu fraktalnego** przedstawił **Edgar Peters**. W jego ujęciu „Fraktal jest obiektem, którego części pozostają w pewnej relacji do całości”⁶³. Prezentowane określenie, intuicyjne i niewymagające operowania wysublimowanym aparatem matematycznym, nie może być jednak uznane za nawet częściowo satysfakcjonujące. Wynika to z faktu, że dowolny obiekt spełnia wymaganie zawarte w definiensie – każda część jakiegokolwiek tworu pozostaje z nim w relacji zawierania się – co sprawia, że przedstawiona definicja traci moc różnicowania obiektów na fraktalne i niefraktalne. Dopiero uściślenie dokonane następnie przez Petersa, głoszące, że „**Fraktale są samopodobne**”⁶⁴, można uznać za bardziej użyteczne. Samopodobieństwo jest jedną z cech nieodłącznie związanych z obiektami fraktalnymi. Jeżeli jednak rygorystycznie trzymać się wprowadzonej definicji, wówczas praktycznie wszystkie obiekty naturalne znalazłyby się poza klasą fraktali z dwóch przyczyn.

Po pierwsze, samopodobieństwo w ich przypadku jest jedynie przybliżone. Formalna definicja obiektu samopodobnego nie ma tu zastosowania, wymaga ona bowiem zachowania określonych własności, które można uznać za spełnione jedynie zgrubnie. Także nie wszystkie twory abstrakcyjne można by w świetle tego określenia uznać za fraktale – dla przykładu nie byłyby nim śnieżynka von Kocha. Co więcej, wówczas za obiekty fraktalne należałoby uznać także np. odcinek, który nigdy nie był traktowany jako fraktal. Widać zatem, że wykorzystanie wspomnianej definicji prowadziłyby do błędnej klasyfikacji obiektów geometrycznych.

Po drugie, obiekty samopodobne w prezentowanym ujęciu mogą być jedynie wytworami ludzkiego umysłu. W rzeczywistym świecie istnieje granica, po której przekroczeniu wspomniana definicja traci sens, na poziomie molekularnym bowiem nie sposób mówić o obiektach fraktalnych. Zarzut ten nie odnosi się jednak tylko do aktualnie omawianej definicji, ponieważ występuje zawsze wtedy, kiedy zachodzi konieczność uwzględnienia wielkości nieskończenie małych, a jednocześnie ciągłych. Konstatacja powyższa osłabia nieco jego wagę, jednak należy cały czas mieć go na uwadze.

Pierwszy ze sformułowanych zarzutów można oddalić, posługując się pojęciem **samopodobieństwa statystycznego**. Zamiast żądania, by części składowe danego obiektu można było otrzymać wskutek stosowania podobieństwa zwężającego, wymagane jest jedynie, by rozkład prawdopodobieństwa analizowanej wielkości należał do tej samej rodziny rozkładów z dokładnością do wartości parametrów. Dokonana generalizacja rozumienia samopodobieństwa pozwala sklasyfikować jako fraktale wiele obiektów niebędących ściśle samopodobnymi. Do klasycznych przykładów

⁶³ E. Peters: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. WIG-Press, Warszawa 1997, s. 49.

⁶⁴ Ibid.

należy np. przywoływane przez Mandelbrota rozmieszczenie złóż miedzi⁶⁵. Mimo to należy uznać, że wspomniane uogólnienie nie jest dostateczne. Wynika to z faktu, że podobieństwo (jako złożenie homotetii i izometrii) prowadzi do przeskalowania obiektów w każdym kierunku zgodnie z tym samym współczynnikiem. Tymczasem wiele tworów uznawanych powszechnie za fraktalne skaluje się odmiennie w różnych kierunkach (m.in. trajektorie procesu Wienera-Bacheliera). Z tego względu wymóg samopodobieństwa zastępuje się obecnie wymogiem samoafiniczności. Transformacją afiniczną nazywa się natomiast przekształcenie $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone jako: $Q(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \mathbf{t}$, gdzie $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest nieosobliwym przekształceniem liniowym, a $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Można pokazać, że przekształcenie samoafiniczne jest złożeniem translacji, symetrii osiowych, obrotów i homotetii. Jeżeli teraz dana jest rodzina afinicznych odwzorowań zwięzających $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$, $2 \leq m < \infty$, to zbiór niezmienniczy tego układu iterowanych odwzorowań w sytuacji gdy istnieje niepusty, ograniczony i otwarty zbiór V , taki że $\bigcup_{i=1}^m Q_i(V) \subset V$ oraz $Q_i(V) \cap Q_j(V) = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$,

nazywamy samoafinicznym. Analogicznie do samopodobieństwa statystycznego definiuje się także statystyczną samoafiniczność. Zakładając teraz, że obiekty fraktalne powinny cechować się statystyczną samoafinicznością, rozszerzamy zdecydowanie klasę tworów fraktalnych m.in. o obiekty występujące w naturze. Dlatego też początkowo wykorzystywane pojęcie samopodobieństwa przyjęło się obecnie traktować w kontekście przekształceń afinicznych.

Posługiwanie się pojęciem samoafiniczności bądź samoafiniczności statystycznej pozwala włączyć do klasy obiektów fraktalnych wiele tworów, które poprzednio nie byłyby jej elementami. Takie postępowanie nie eliminuje jednak kłopotów wynikających z zaklasyfikowania w myśl omawianej definicji do zbioru fraktali obiektów, które z pewnością za fraktale uznane być nie mogą. Konieczne stało się zatem nałożenie dodatkowych warunków, tak by elementy niepożądane ze zbioru tworów fraktalnych usunąć. W tym celu zaproponowano, by uznać, że fraktalami są obiekty mające skomplikowaną, względnie subtelną strukturę geometryczną. Wskutek powiększenia obiektu coraz większa liczba jego detali powinna stawać się widoczna dla obserwatora. Podejście to jest o tyle wygodne, że znaczna część analizowanych fraktali abstrakcyjnych wyróżnia się spośród pozostałych figur swoistą geometrią, odmienną niż w przypadku najczęściej wykorzystywanych tworów. Mimo swej pozornej prostoty sformalizowanie takiego warunku jest jednak niesłychanie trudne, jeśli nie niemożliwe. Adekwatne określenie naukowe winno bowiem być intersubiektywnie jednakowo rozumiane i niepozostawiające wątpliwości co do swej istoty. Przedstawiony warunek nie spełnia tego wymogu, jako że rozumienie przymiotników „skomplikowany” czy „subtelny” mogłoby być odmienne, a zatem opisany warunek należałoby odrzucić.

Próbowano także doprecyzować definicję fraktala, wykorzystując fakt, że znaczna część spośród fraktali abstrakcyjnych jest określana w bardzo prosty sposób, często rekurencyjny (m.in. krzywa von Kocha, trójkąt Sierpińskiego). Zaproponowano zatem, by za fraktale uznać obiekty spełniające powyższy warunek. Podejście takie jednak ma dwie zasadnicze wady. Po pierwsze, nie jest możliwe zastosowanie go w odniesieniu do obiektów występujących w rzeczywistym świecie. Po drugie, z faktu, że wybrane obiekty będące w sposób oczywisty fraktalami można skonstruować lub zdefiniować w sposób rekurencyjny, nie wynika, że wszystkie fraktale muszą cechować się tą własnością. Ponadto nie wyklucza to możliwości, że twory niebędące fraktalami mogą być uzyskane w ten sposób. Rekurencyjnie da się albowiem zdefiniować okrąg, który z pewnością nie jest fraktalem⁶⁶.

⁶⁵ B. Mandelbrot: Multifractal Measures, Especially for the Geophysicist. [In:] C. Scholz, B. Mandelbrot (eds.): Fractals in Geophysics. Springer, Basel 1989, s. 6.

⁶⁶ J. Kudrewicz: Op. cit., s. 19–20.

Wskazane względy sprawiły, że wspomniany warunek nie został uznany za *conditio sine qua non* sklasyfikowania analizowanego obiektu jako fraktalny.

Generalną niedogodnością związaną z wspomnianymi określeniami jest ich nieprecyzyjność i możliwość odmiennego klasyfikowania obiektów w zależności od subiektywnej oceny badacza. Dlatego też najpowszechniejszą stała się precyzyjna definicja o charakterze projektującym podana przez Mandelbrota⁶⁷. Zgodnie z jego określeniem: „**Fraktal jest z definicji zbiorem, którego wymiar Hausdorffa-Besicovitcha jest większy niż wymiar topologiczny**”⁶⁸. Z tego względu Mandelbrot mianem wymiaru fraktalnego określał wymiar Hausdorffa. Zauważa jednocześnie, że wśród obiektów uznanych za fraktalne w myśl poprzedniego określenia „Najlepsze fraktale to te, które cechują się maksymalną niezmienniczością”⁶⁹ – ze względu na zmianę skali i przemieszczenie.

Definicja podana przez Mandelbrota została początkowo uznana za całkowicie satysfakcjonującą – jest zresztą powszechnie wykorzystywana do chwili obecnej. Jej niezaprzeczalną zaletą jest precyzja i fakt, że wyłącza ona z klasy obiektów fraktalnych odcinki czy proste. Mimo to sam Autor z czasem zaprzestał jej restrykcyjnego stosowania. Jak odnotował: „Ta definicja podoba mi się coraz mniej i traktuję ją coraz mniej poważnie. (...) Czuję (...), że pojęcie fraktala jest bardziej podstawowe niż jakkolwiek poszczególne definicje wymiaru”⁷⁰. Obiekty, które przyjęło się traktować jako fraktale (np. diabelskie schody Cantora), w myśl przytoczonej definicji nie można by uznać za takie. Ponadto wspomniane określenie jest ukierunkowane na klasyfikację tworów abstrakcyjnych, a nie naturalnych. Sprawilo to, że w swoich dalszych pracach Mandelbrot praktycznie zarzucił posługiwanie się stworzoną przez siebie definicją, traktując ją jedynie jako wskazówkę, a nie formalne kryterium klasyfikacyjne. Coraz częściej odnosił się on do wspomnianych uprzednio cech fraktali, podkreślając, że „Ogólnie rzecz biorąc, **fraktale matematyczne i naturalne to obiekty, których chropowatość i rozdrobnienie nie zanika ani nie fluktuuje, lecz pozostaje nie zmienione w istotnym stopniu przy kolejnych przybliżeniach**”⁷¹. Ponadto zauważał, że „Algorytmy generujące fraktale są zazwyczaj tak nadzwyczajnie krótkie, że (...) muszą być nazwane «prostymi». Ich fraktalne rezultaty, w przeciwieństwie do nich samych, często zawierają niezmiernie bogate struktury”⁷². Przedkładając zalety wynikające z możliwości skorygowania przez badacza rezultatów formalnej klasyfikacji, już od drugiego wydania *The Fractal Geometry of Nature* postanowił on pozostawić określenie „fraktal” bez ścisłej definicji.

Także w literaturze krajowej próbowano stworzyć określenia obiektu fraktalnego spełniającego uprzednio wspomniane warunki. Oryginalną definicję podał **Jacek Kudrewicz**, pisząc, że „(...) **fraktalem w przestrzeni metrycznej X nazywamy każdy niepusty, zwarty podzbiór tej przestrzeni**”⁷³. Jak słusznie zauważyła Adrianna Mastalerz-Kodzis: „Definicja przytoczona jest jednak bardzo ogólna”⁷⁴, jako że wówczas fraktalami byłoby wiele tworów znanych z geometrii euklidesowej. Dlatego też w kolejnych wydaniach swej monografii Kudrewicz posługiwał się definicją Mandelbrota. Ponadto wprowadził on pojęcie przestrzeni fraktali. Przez $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

⁶⁷ W myśl określenia zawartego w C. Hempel: *Podstawy nauk przyrodniczych*. WNT, Warszawa 1968, s. 126–127.

⁶⁸ B. Mandelbrot: *Fractal...*, op. cit., s. 15.

⁶⁹ *Ibid.*, s. 18.

⁷⁰ B. Mandelbrot: *On Fractal Geometry, and a Few of the Mathematical Questions It Has Raised*. [In:] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians August 16–24 1983 Warszawa*. PWN, Warszawa 1984, s. 1674–1675.

⁷¹ B. Mandelbrot: *A Geometry Able to Include Mountains and Clouds*. [In:] N. Lesmoir-Gordon (ed.): *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, London 2010, s. 44.

⁷² B. Mandelbrot: *Fractal geometry: what is it, and what does it do?* „*Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*”, Vol. 423, No. 1864 May 1989, s. 6.

⁷³ Za: A. Mastalerz-Kodzis: *Modelowanie...*, op. cit., s. 14.

⁷⁴ *Ibid.*

oznaczymy rodzinę niepustych i zwartych⁷⁵ podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^n . Wówczas dla zbiorów A i B – elementów zbioru $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ określa się metrykę Hausdorffa następująco⁷⁶:

$$h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\},$$

gdzie $d(A, B), d(B, A)$ oznacza odległość zbioru A od zbioru B i odległość zbioru B od zbioru A , które są zdefiniowane jak niżej:

$$d(A, B) = \max_{x \in A} \{d(x, B)\},$$

$$d(B, A) = \max_{y \in B} \{d(y, A)\},$$

przy czym odległość punktu od zbioru to:

$$d(x, B) = \min_{y \in B} \{\rho(x, y)\},$$

$$d(y, A) = \min_{x \in A} \{\rho(x, y)\},$$

gdzie $\rho(x, y)$ jest odległością między punktami x i y w sensie metryki euklidesowej. Ekwiwaleńtnie, aczkolwiek bardziej intuicyjnie, metrykę Hausdorffa można określić jako najmniejsze ε , takie że ε -aureola zbioru A zawiera zbiór B , a ε -aureola zbioru B zawiera zbiór A :

$$h(A, B) = \inf \{\varepsilon : A \subset A_\varepsilon(B), B \subset A_\varepsilon(A)\}.$$

Zmetryzowaną za pomocą odległości Hausdorffa przestrzeń $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ Kudrewicz nazywa **przestrzenią fraktali**, jak pisze, „(...) nie dlatego, że wszystkie jej elementy są fraktalami, ale dlatego, że bardzo dużo znanych fraktali należy do tej przestrzeni”⁷⁷.

Autor podziela pogląd, że ścisła formalna definicja fraktala, niewątpliwie użyteczna, mogłaby krępować swobodę rozważań, zwłaszcza w sytuacji, gdy badania dotyczyłyby nauk empirycznych, a nie aksjomatycznych. Całkowicie słuszne wydaje się zatem stanowisko **Kennetha Falconera**, głoszącego, że „(...) **definicja «fraktala» powinna być traktowana w ten sam sposób jak biolog traktuje definicję «życia». Nie istnieje ścisłe i krótkie określenie, lecz jedynie lista właściwości charakteryzujących istotę żywą**”⁷⁸. Dlatego też autor nie podziela opinii wyrażonej przez Stevena Krantza w jego niezwykle krytycznym względem geometrii fraktalnej artykule: „(...) nie istnieje precyzyjna definicja pojęcia «fraktal». Jako matematyk uważam, że nie wróży to dobrze”⁷⁹. Zwłaszcza w odniesieniu do fraktali naturalnych za bardziej uzasadnione można uznać dostosowywanie właściwych określeń w zależności od przedmiotu badań. Wspomniana konwencja zostanie zastosowana także w niniejszej monografii w analizie finansowych szeregów czasowych i rozważaniach nad użytecznością charakterystyk fraktalnych w ocenie ryzyka inwestycyjnego.

Określiwszy pojęcie fraktala, wskazane jest także przedstawienie najistotniejszej i najczęściej spotykanej klasyfikacji tych obiektów, istotnej dla przedstawionych rozważań. Najpowszechniejszy podział tworów fraktalnych zakłada wyodrębnienie dwóch klas: **fraktali abstrakcyjnych** (zwanych na ogół matematycznymi) **oraz naturalnych**. Fraktale abstrakcyjne są wytworami ludzkiego umysłu, a ich konstrukcja jest zadana w określony sposób z wykorzystaniem aparatu

⁷⁵ Tzn. jeżeli każde otwarte pokrycie danego zbioru zawiera podpokrycie skończone (K. Falconer: Fractal..., op. cit., s. 6).

⁷⁶ Za: J. Kudrewicz: Op. cit., s. 28 i dalsze.

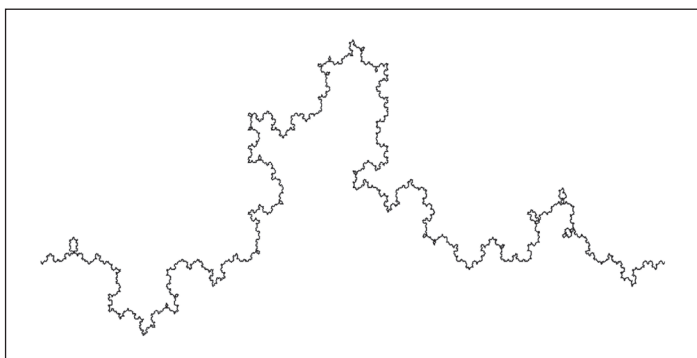
⁷⁷ Ibid., s. 29.

⁷⁸ K. Falconer: Op. cit., s. XXV.

⁷⁹ S. Krantz: Fractal Geometry. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 11, No. 4/1989, s. 14.

matematycznego. Z kolei przez fraktale naturalne rozumie się obiekty o właściwościach fraktalnych występujące w przyrodzie. Ze względu na tematykę niniejszej pracy autor sądzi, że do wspomnianej klasy należy włączyć także te obiekty abstrakcyjne, które odzwierciedlają pewne rzeczywiste zjawiska czy procesy. Wydaje się bowiem zasadne stwierdzenie, że np. wykres odwzorowujący jako funkcję czasu ciśnienie atmosferyczne w wybranym punkcie naszej przestrzeni, jeżeli wykazywałby własności fraktalne, należałoby włączyć do klasy fraktali naturalnych, mimo że sama idea przedstawienia takiego odwzorowania jest tworem ludzkiego umysłu.

Drugim rozróżnieniem wprowadzonym w literaturze przedmiotu jest podział na **fraktale deterministyczne i losowe**. W odniesieniu do fraktali deterministycznych ich kształt jest ściśle określony *a priori*, poprzez zadaną, deterministyczną zależność. Dlatego też np. fraktale będące atryktorami opisywanych dotychczas układów iterowanych odwzorowań można zaliczyć do fraktali deterministycznych. Ponadto istnieją fraktale losowe, których kształt jest uzależniony od zaburzeń losowych, a zatem niemożliwych do opisanego *a priori* inaczej, jak za pomocą odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa. Prezentowane dychotomiczne podziały bywają często utożsamiane⁸⁰. Zdaniem autora podejście to nie jest słuszne. Lepszym rozwiązaniem wydaje się nałożenie dwóch podziałów dychotomicznych w celu utworzenia czterech klas obiektów: fraktali abstrakcyjnych deterministycznych, abstrakcyjnych losowych, naturalnych deterministycznych i naturalnych losowych. Nie ma bowiem wątpliwości, że do pierwszej klasy należy zaliczyć np. krzywą von Kocha czy trójkąt Sierpińskiego, a do czwartej np. liść paproci. Wątpliwość przy podziale wyłącznie dychotomicznym na fraktale abstrakcyjne (tj. deterministyczne) i naturalne (tj. losowe) powstaje jednak przy obiekcie nazwanym losową krzywą von Kocha. Jedną z możliwości wprowadzenie elementów stochastycznych w budowie krzywej von Kocha jest np. losowy dobór półpłaszczyzny, na które dzieli płaszczyznę prosta zawierająca dany odcinek, która zawierać będzie trzeci wierzchołek trójkąta tworzonego na każdym etapie jej konstrukcji. Przykładowy wykres, w sytuacji gdy stosunek prawdopodobieństw kształtuje się jak 1:1, przedstawiono poniżej.



Rys. 21. Losowa krzywa von Kocha (przybliżenie)
Źródło: Opracowanie własne.

Obiekt ten jest niewątpliwie tworem abstrakcyjnym, ale jednocześnie niezaprzecalnie losowym. Posiłkowanie się zatem wyłącznie jedną przedstawioną dychotomiczną typologią nie jest poprawne. Ewentualny sprzeciw mogłoby budzić wyróżnienie klasy fraktali naturalnych deterministycznych, nie wydaje się bowiem nieprawdopodobne, by klasa ta nie mogła okazać się pusta. Ponieważ jest wątpliwe, by rozstrzygnięcie tej kwestii było możliwe (a na pewno wykracza poza ramy niniejszej publikacji), autor proponuje posiłkowanie się czteroklasową typologią obiektów

⁸⁰ Zob. np. W. Ratajczak: Metodologiczne aspekty fraktalnego modelowania rzeczywistości. <http://www.zep.amu.edu.pl/wp-content/Fraktale.pdf>.

fraktalnych. Finansowe szeregi czasowe – przedmiot prezentowanych w dalszej części badań – można by zatem zaliczyć (wykazawszy uprzednio ich fraktalne właściwości) do klasy fraktali naturalnych losowych. Znalezienie dostatecznie wiernie odzwierciedlających ich tworów należących do klasy fraktali abstrakcyjnych (losowych bądź deterministycznych) oraz rozważenie wpływu uznania za prawdziwą hipotezy o fraktalnych cechach finansowych szeregów czasowych będzie przedmiotem kolejnego rozdziału.

1.4. Konkluzje

W niniejszym rozdziale zaprezentowano obszernie szereg pojęć i koncepcji dotyczących formalnego ujęcia obiektów fraktalnych. Ponadto przeanalizowano kluczowe charakterystyki, a także podjęto próbę dokonania ich porównania. Może się wydawać, że przedstawione w niniejszym rozdziale obiekty, terminy oraz zależności mogą nie mieć istotnego związku z pozornie odległą problematyką modelowania cen instrumentów finansowych oraz oceną poziomu ryzyka związanego z inwestowaniem w te instrumenty. Po głębszej analizie pogląd ten należy jednak, zdaniem autora, zdecydowanie odrzucić.

Po pierwsze, wykorzystanie fraktali do modelowania zjawisk i procesów przyrodniczych i społecznych przyniosło dotychczas wiele sukcesów. Geometria fraktalna jest w chwili obecnej stosowana przez uczonych specjalizujących się w zagadnieniach tak odległych jak funkcjonowanie narządów organizmów żywych, obciążenie sieci telekomunikacyjnych czy zarządzanie zapasami⁸¹. Skomplikowany aparat matematyczny oraz sformalizowane podejście (zwłaszcza w odniesieniu do fraktali abstrakcyjnych), jakkolwiek rodzące pewne trudności, nie powinny wpływać w istotny sposób na ocenę przydatności metod fraktalnych w naukach ekonomicznych.

Po drugie, właściwe finansowe szeregi czasowe stanowiące obecnie przedmiot ilościowych badań nad ryzykownością dokonywanych inwestycji, można odwzorować na płaszczyźnie (lub w innej przestrzeni) w odpowiedni sposób. Nie ma wówczas żadnych przeciwwskazań, by efektu takiego odwzorowania, będącego pewną figurą geometryczną, nie móc badać metodami fraktalnymi, względnie nawet uznać po spełnieniu odpowiednich warunków za twór fraktalny. Charakterystyki fraktalne obiektu można wtedy przypisać także badanemu finansowemu szeregowi czasowemu. W tej sytuacji szeregi czasowe, a także zjawiska i procesy, których są one odzwierciedleniem, można by różnicować, wykorzystując charakterystyki fraktalne.

Przedstawione rozumowanie wskazuje, że metody fraktalne mogą być użyteczne w opisie i badaniu zjawisk ekonomicznych. Autor jest zdania, że w istocie są one nieodzowne (choć być może samoistnie niewystarczające) dla oceny poziomu ryzyka związanego z inwestycjami finansowymi. W celu właściwego naświetlenia ich użyteczności konieczna jest jednak nie tylko przedstawiona analiza koncepcji *stricto* matematycznych, lecz także teorii pretendującej do roli teorii wiodącej w zakresie modelowania cen instrumentów finansowych, tj. teorii rynku fraktalnego. Prezentacji możliwości wykorzystania fraktali w modelowaniu cen instrumentów finansowych i ocenie ryzyka z nimi związanego za pomocą metod fraktalnych poświęcony jest kolejny rozdział.

⁸¹ Zob. np. I. Stewart: *The Nature of Fractal Geometry*. [In:] N. Lesmoir-Gordon (ed.): *Op. cit.*, s. 15–23; A. Mularczyk, I. Zdonek: *Analiza statystyk stron internetowych Politechniki Śląskiej metodami fraktalnymi*. „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Organizacja i Zarządzanie”, z. 64, nr 1894/2013; A. Mularczyk: *Fraktalne wspomaganie zarządzania zapasami*. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach”, nr 50/2008.

Rozdział II

Znaczenie i przydatność teorii rynku fraktalnego dla pomiaru ryzyka inwestycji finansowych

Gdyby ktoś wierzył, że na całej przestrzeni od Londynu do Paryża wysokość każdego miejsca nad poziomem morza jest funkcją ciągłą odległości od Londynu, i w tym przekonaniu spacerowałby spokojnie na skałach Doveru, zapatrzony w niebo, niezawodnie utonąłby w morzu, zanim zdążyłby dojść do przekonania, że uogólnienia naukowe wymagają wielkiej ostrożności.

A. N. Whitehead

Niniejszy rozdział jest poświęcony analizie konstrukcji nazwanej **teorią rynku fraktalnego**. Zamierzeniem autora jest ukazanie jej jako koncepcji uniwersalnej, a jednocześnie zawierającej dotychczasowe teorie jako przypadki szczególne, uzyskiwane poprzez przyjęcie pewnych założeń upraszczających. Jednocześnie zostanie podjęta próba krytycznej oceny aktualnie wykorzystywanych metod kwantyfikacji ryzyka, uznawanych za wymagające rewizji wobec wprowadzanych zmian w modelach kształtowania się cen instrumentów finansowych. Ponadto zostanie przedstawiona koncepcja oceny poziomu ryzyka inwestycyjnego, adekwatna w sytuacji przyjęcia hipotezy rynku fraktalnego za prawdziwą, zakładająca wykorzystanie wielkości szczegółowo omówionych w poprzednim rozdziale.

2.1. Teoria rynku fraktalnego – istota i znaczenie dla pomiaru ryzyka inwestycji finansowych

Pojęcie „teorii rynku fraktalnego” jest obecnie coraz częściej spotykane w publikacjach o charakterze naukowym. Mianem tym określa się wiele rozmaitych koncepcji z zakresu modelowania cen instrumentów finansowych i oceny ryzyka inwestycyjnego, nie zawsze tworzących spójną konstrukcję. Pojęcie to jest, w opinii autora, nadużywane, co wprowadza pewien chaos nie tylko terminologiczny, lecz także w zakresie poprawnego rozumienia samej istoty teorii. Dlatego też w pierwszej kolejności konieczne jest dokonanie selekcji i określenie, które koncepcje nie

stanowią składowych konstrukcji bardziej ogólnej – teorii rynku fraktalnego. Postępowanie to, rodzące wiele wątpliwości ze względu na fakt, że teoria rynku fraktalnego nie jest zwarta ani spójna i wymaga pewnych subiektywnych ocen, jest jednak niezbędne dla dostatecznego skonkretyzowania przedmiotu badań.

2.1.1. Krytyczna analiza współzależności pomiędzy teorią rynku fraktalnego a teorią chaosu deterministycznego

Wśród publikacji, które w największym stopniu przyczyniły się do rozpowszechnienia idei wykorzystania fraktali w modelowaniu finansowym, do najistotniejszych należą dwie monografie Edgara Petersa: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe* oraz *Fractal Market Analysis*. Obydwie są poświęcone nie tylko obiektom fraktalnym, lecz także zastosowaniu metod analizy chaotycznych systemów dynamicznych oraz problematyce dynamiki nieliniowej na rynku kapitałowym. Mimo że pojęcia te pozostają w bliskim związku z koncepcją rynku fraktalnego, to jednak te relacje nie mogą prowadzić do uznania teorii chaosu za niezbędny element składowy teorii rynku fraktalnego. Wspomniane nieścisłości mają swoje źródło najprawdopodobniej w tym, że atraktory systemów dynamicznych mają często charakter fraktalny i obiekty te można badać z wykorzystaniem mierników i metod wspomnianych w poprzednim rozdziale⁸². Tym niemniej twórcy teorii rynku fraktalnego (jakkolwiek samo pojęcie spopularyzował właśnie Peters) nie posiłkowali się koncepcjami wywodzącymi się z teorii chaotycznych systemów dynamicznych, opisując mechanizmy kształtowania się cen instrumentów finansowych, a eksploatowane przez nich modele matematyczne w nikłej mierze opierają się na jej osiągnięciach. Z tego też względu wydaje się celowe dokonanie rozróżnienia pomiędzy wspomnianymi koncepcjami. Autor nie podziela jednak zdania, jakoby teorie te dzieliły sprzeczności niemożliwe do wyeliminowania. Mimo że teoria chaotycznych systemów dynamicznych opierała się początkowo na analizie układów deterministycznych, a elementy losowe odgrywały w tej koncepcji pośledniejszą rolę, zaś teoria rynku fraktalnego jest nierozzerwalnie związana z teorią procesów stochastycznych i składnik przypadkowy ma charakter dominujący, to jednak nie jest wykluczone, że *de facto* tworzą one komplementarny układ hipotez wyjaśniających różne aspekty funkcjonowania tego samego mechanizmu. Jest co najmniej prawdopodobne, że niektóre istotne czynniki wpływające na poziom cen na rynku kapitałowym mają w części charakter deterministyczny, choć być może ów determinizm ma naturę chaotyczną, tak że odróżnienie go od składowych czysto losowych może być problematyczne. Nie jest również wykluczone, że dominująca część zmienności na rynku kapitałowym jest efektem agregacji wielkiej liczby deterministycznych, o relatywnie niewielkim wpływie na sumaryczny efekt, choć silnie zróżnicowanych przyczyn. Tym niemniej dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień celowe wydaje się podkreślenie, że koncepcja rynku chaotycznego nie jest tożsama z teorią rynku fraktalnego. Ponadto autor podziela opinię wyrażoną przez Rosario Mantegnę oraz Eugene'a Stanleya: „Chociaż nie można wykluczyć hipotezy, że rynek finansowy rządzi się dynamiką chaotyczną, (...) przyjmujemy paradygmat głoszący, że dynamika cen papierów wartościowych podlega procesom stochastycznym. Wybór nasz jest usprawiedliwiony obserwacją, że rozwój w czasie ceny danego papieru wartościowego zależy w sposób istotny od wszelkich informacji wpływających na jego los; niepodobna sądzić, że wszystkie te informacje mogłyby być w istocie opisane za pomocą niewielkiej liczby nieliniowych równań deterministycznych”⁸³. Jest to punkt widzenia przyjęty przez autora w niniejszej monografii.

⁸² Zob. S. Chatterjee, M. Yilmaz: Chaos, Fractals and Statistics. „Statistical Science”, Vol. 7, No. 1/1992, s. 53.

⁸³ R. Mantegna, H. Stanley: Ekonofizyka. Wprowadzenie. WN PWN, Warszawa 2001, s. 19.

2.1.2. Pojęcie fraktala w teorii rynku fraktalnego

W literaturze przedmiotu teoria rynku fraktalnego często jest postrzegana raczej przez pryzmat instrumentarium stosowanego w prowadzonych analizach, niż w kontekście określonych własności badanych szeregów czasowych⁸⁴. W większości przypadków brak jest jasnego dookreślenia (poza odesłaniami do lakonicznych sformułowań Petersa), jak należałoby rozumieć ideę rynku fraktalnego. Z tego też względu autor uznał za konieczne przedstawienie własnego postrzegania istoty teorii rynku fraktalnego.

Kluczowym pojęciem konstytuującym istotę teorii rynku fraktalnego jest pojęcie obiektu fraktalnego, szczegółowo omówione w poprzednim rozdziale. Fraktale stały się przedmiotem zainteresowania ekonomistów ze względu na swoje specyficzne własności, cechujące jednocześnie wykresy finansowych szeregów czasowych. Przedstawiona w poprzednim rozdziale dyskusja nad definicją obiektu fraktalnego pozwala stwierdzić, że najistotniejszą chyba własnością obiektów tego typu jest samopodobieństwo (samoafiniczność⁸⁵). Pozostałe wskazane cechy fraktali w badaniach ekonomicznych tracą na znaczeniu, nie do końca bowiem (lub wręcz w nikłym zakresie) znane są mechanizmy ich powstawania, co wyklucza możliwość wykorzystania określeń opierających się na analizie ich kreacji. Jakkolwiek wszystkie przywołane uprzednio zarzuty nie tracą na znaczeniu w przypadku wykorzystania matematyki fraktali w naukach ekonomicznych, to jednak wydaje się, że relatywnie w najmniejszym stopniu są one uprawomocnione w stosunku do wspomnianej cechy samopodobieństwa. Dlatego też w niniejszym rozdziale **przez obiekty fraktalne autor będzie rozumiał obiekty samopodobne bądź samoafiniczne.**

Przedmiotem prowadzonych analiz są szeregi czasowe pochodzące z rynków finansowych – najczęściej szeregi czasowe cen lub stóp zwrotu. W związku ze specyficznym obiektem badań rodzi się jednak problem dotyczący ich natury. W większości przypadków autorzy pomijają niezmiernie istotną kwestię – a mianowicie, że reprezentacją graficzną finansowych szeregów czasowych właściwie nie są krzywe (prostowalne lub nie), lecz zbiory izolowanych punktów. Jedyne posiłkowanie się pewnymi arbitralnie przyjętymi (choć nie bezzasadnymi) konwencjami umożliwia taką transformację szeregu cen czy stóp zwrotu, by ich reprezentacją graficzną była krzywa, przy czym trzeba pamiętać, że „(...) skoki w przebiegu funkcji będą tem większe, im wyższy poziom bogactwa podmiotu jednostkowego lub społeczeństwa, im bardziej podzielny towar, im mniej podzielny pieniądz”⁸⁶. Z tego też względu rzeczywisty wymiar topologiczny i wymiar fraktalny wykresu fluktuacji danej wielkości w czasie jest równy zero. Transformacja polegająca na łączeniu kolejnych punktów pojedynczymi odcinkami bądź dwoma odcinkami o wspólnym końcu, równoległymi do osi układu współrzędnych również nie pozwala na wyeliminowanie wspomnianego problemu. W takim bowiem przypadku otrzymujemy łamaną, której wymiar topologiczny i fraktalny wynosi dokładnie 1. Rygorystyczne podejście do omawianych uprzednio definicji skutkowałoby bezzużytecznością analizy fraktalnej na rynkach finansowych. Konieczne jest zatem poczynienie pewnych dodatkowych założeń bądź zastąpienie dotychczasowych określeń stosownymi do przedmiotu badań, lecz nieprowadzącymi do zmniejszenia użyteczności metod matematyki fraktalnej.

⁸⁴ Dla przykładu, w jednej z krajowych rozpraw poświęconych omawianej problematyce, kompleksowo ujmujących przedmiotowe zagadnienia, autorstwa Niny Siemienuk, właściwie brak jest określenia, jak należałoby rozumieć dyskutowane właściwości fraktalne polskiego rynku kapitałowego (N. Siemienuk: *Fraktalne właściwości polskiego rynku kapitałowego*. Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2001).

⁸⁵ Mimo że właściwsze byłoby określenie „samoafiniczność”, ze względu na rozpowszechnienie terminu „samopodobieństwo” w dalszej części pracy będzie mowa o „samopodobnych procesach stochastycznych”.

⁸⁶ A. Heydel: Uwagi o nieciągłości funkcji w ekonomji. „*Ekonomista*”, t.II/1934, s. 9–10.

Pierwszym rozwiązaniem omawianego problemu jest przyjęcie, że analizowane figury złożone z punktów są podzbiorami pewnej krzywej, której pozostałe punkty pozostają badaczowi nieznanne. Wówczas pojęcie wymiaru można by odnosić do rzeczony krzywej, co eliminowałoby problemy związane z dysponowaniem wyłącznie wykresami punktowymi. Podejście to rodzi jednak pewną wątpliwość – dla danego zbioru punktów istnieją funkcje o rozmaitych wymiarach fraktalnych. Dopóki nie jesteśmy w stanie obserwować ich przebiegu dla infinitezimalnych przyrostów czasu, nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, która z nich jest właściwa. Z tego względu opisywane podejście, jakkolwiek intuicyjne i pomocne w rozważaniach dotyczących ciągłych procesów stochastycznych, powinno być traktowane z należytą ostrożnością.

Drugim możliwym podejściem jest przyjęcie, że badany zbiór nie jest obiektem fraktalnym, to jednak dla określonego zakresu zmienności przyrostów zmiennej niezależnej (czasu) wykazuje on cechy fraktalne, tak że możliwe jest wykorzystanie do jego badania instrumentarium stosowanego w odniesieniu do fraktali. Jest ono o tyle wygodne, że nie wymusza przyjmowania założenia o istnieniu funkcji omawianej uprzednio, nie prowadząc do związanych z takim postępowaniem wątpliwości. W tym podejściu trzeba jednak pamiętać, że poza analizowanym zakresem zmienności badany obiekt może nie wykazywać własności fraktalnych (a nawet na pewno nie wykazuje ich dla dostatecznie niewielkich przyrostów czasu). Należy być świadomym tego faktu, w szczególności gdy wnioski sformułowane w oparciu o szereg czasowy o danym minimalnym i maksymalnym interwale czasowym są uogólniane dla innych zakresów zmienności. Ten niedostatek rozważanego podejścia występuje jednak także w sytuacji omawianej uprzednio, a istniejące różnice skutkują jedynie odmienną interpretacją. O ile poprzednio zakładamy, że nasze szacunki są niepewne ze względu na niewiedzę co do kształtowania się zmiennej, o tyle obecnie przyjmujemy, że zachowanie to jest znane, lecz odmienne od pożądanego. Pierwsze podejście łatwiej wykorzystać w rozumowaniach, zaś drugie jest bliższe rzeczywistości. W zależności od ich użyteczności w niniejszej monografii wykorzystywane są obydwie.

2.1.3. Samopodobieństwo jako kluczowe pojęcie określające teorię rynku fraktalnego

Ze względu na znaczenie pojęcia **samopodobieństwa** w dalszych rozważaniach niezbędne jest skonkretyzowanie, jak należy je rozumieć w odniesieniu do procesów stochastycznych i ich trajektorii. Otóż o procesie stochastycznym $X(t)$, $t \geq 0$ mówimy, że jest on samopodobny (*ss – self-similar*), jeżeli istnieją takie dodatnie liczby rzeczywiste a_r , że dla dowolnego $r > 0$ zachodzi⁸⁷:

$$X(t) \stackrel{d}{=} a_r X(rt), \quad t \geq 0,$$

przy czym symbol $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość wszystkich skończenie-wymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa. Powyższa tożsamość implikuje, że:

$$X(t) \stackrel{d}{=} r^{-H} X(rt), \quad t \geq 0.$$

Z tego też względu proces taki określa się jako *H-ss*.

Powyższa własność jest jednak relatywnie restrykcyjna, wobec czego rozważa się także procesy o samopodobnych przyrostach (*self-similar increments – H-ssi*), tj. takie że istnieje pewne rzeczywiste H , że dla dowolnego $r > 0$:

⁸⁷ Za: D. Veneziano: Basic Properties and Characterization of Stochastically Self-Similar Processes in \mathbb{R}^d . „Fractals”, Vol. 7, No. 1/1999, s. 60.

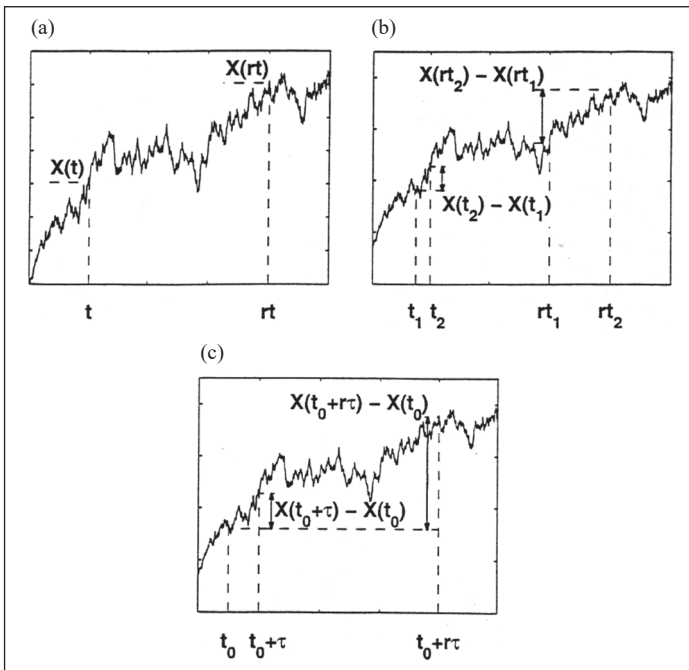
$$X(t_2) - X(t_1) \stackrel{d}{=} r^{-H} [X(rt_2) - X(rt_1)], \quad t_1 \geq 0, t_2 \geq 0.$$

Warunek ten jest o tyle słabszy od poprzedniego, że każdy proces typu H -ss jest także procesem typu H -ssi, lecz odwrotna zależność nie musi zachodzić.

Ponadto analizuje się także procesy typu H -ss oraz H -ssi cechujące się stacjonarnością przyrostów (si – *stationary increments*), tj. procesy typu H -ss-si oraz H -ssi-si, spełniające dodatkowo warunek:

$$X(t_0 + \tau) - X(t_0) \stackrel{d}{=} r^{-H} [X(t_0 + r\tau) - X(t_0)], \quad t_0 \geq 0$$

dla dowolnego $r > 0$ oraz τ . Jeżeli powyższa zależność jest spełniona jedynie dla nieskończenie małych τ , wówczas Veneziano zaproponował, by procesy takie nazywać lokalnie samopodobnymi ($lssi$ – *local self-similar increments*). Rysunek ilustrujący powyższe idee przedstawiono poniżej⁸⁸.



Rys. 22. Przykładowe procesy typu H -ss (a), H -ssi (b) oraz H -ss-si lub H -ssi-si (c)

Źródło: D. Veneziano: Basic Properties and Characterization of Stochastically Self-Similar Processes in \mathbb{R}^d , „Fractals”, Vol. 7, No. 1/1999, s. 61.

Mimo że procesy cechujące się określonym rodzajem samopodobieństwa są intensywniej wykorzystywane do modelowania cen czy stóp zwrotu od czasu publikacji prac Mandelbrota poświęconych tej tematyce, to ekonomiczne uzasadnienie dla koncepcji rynku fraktalnego sformułował na początku ostatniej dekady XX wieku Peters. Za prekursora idei rynku fraktalnego należy jednak uznać ekonomistę amerykańskiego **Ralph Elliott**. Elliott na przełomie lat dwudziestych i trzydziestych ubiegłego stulecia na podstawie wnikliwych obserwacji wahań na giełdzie nowojorskiej

⁸⁸ Naturalnym uogólnieniem opisywanych procesów są procesy stochastycznie samopodobne (sss – *stochastic self-similar*) spełniające warunek $X(t) \stackrel{d}{=} A_t \cdot X(t)$, $t \geq 0$ gdzie A_t jest nieujemną zmienną losową, a \cdot oznacza iloczyn niezależnych zmiennych losowych (zob. ibidem, s. 62–63).

zbudował **teorię fal** (*wave principle*) służącą do przewidywania cen akcji. W jego mniemaniu wszelka działalność ludzka (w tym handel giełdowy) „(...) podporządkowana jest prawu, które sprawia że wszelkie działania powtarzają się w podobnych, stale powracających układach o określonej liczbie i przebiegu fal lub impulsów”⁸⁹. Takich fal Elliott dopatruje się w istniejących budowach (piramida w Gizie), botanice (słoneczniki) i na rynku kapitałowym. W swoich analizach posługuje się opracowaną przezeń teorią fal z wykorzystaniem ciągu Fibonacciego implikującego rozwój spiralny⁹⁰. Stwierdził on, że „Ludzkie emocje (...) cechują się rytmicznością”, a w szczególności „Trendy dotyczące cen obligacji, akcji i towarów są głównym przedmiotem analiz i prezentacji ruchu falowego”⁹¹. W opinii twórcy teorii „Kompletny ruch składa się z pięciu fal”, przy czym stwierdzenie to, mimo że ma charakter postulatywny, jest efektem analiz empirycznych, w związku z czym Elliott przyjmuje je jako pewną „własność natury” niewymagającą dalszego uzasadniania. Wśród pięciu fal trzy mają ten sam kierunek co fala główna (tj. fale pierwsza, trzecia i piąta), zaś druga i czwarta – przeciwny. Do kluczowych dla jego teorii twierdzeń (a jednocześnie najbardziej interesujących z punktu widzenia teorii rynku fraktalnego) należy reguła głosząca, że każda fala kierunkowo zgodna z falą główną składa się z pięciu fal mniejszych, zaś fale korekty (tj. o kierunku niezgodnym z falą główną) składają się z trzech mniejszych fal. Zasada ta ma zastosowanie właściwie *ad infinitum*. Elliott wyróżnia bowiem aż dziewięć rodzajów fal ze względu na czas ich trwania. Należą do nich fale: subminutkowe, minutkowe, minutowe, mniejsze, pośrednie (trwające od kilku tygodni do kilku miesięcy), pierwotne (trwające od kilku miesięcy do kilku lat), cyklu (trwające od roku do kilku lat), supercyklu (trwające od kilku lat do kilku dziesięcioleci) i wielkiego supercyklu (trwające od kilku dziesiątek lat)⁹². Tym niemniej wszystkie one ulegają dekompozycji na fale niższego rzędu zgodnie ze wspomnianą uprzednio regułą.

Trudno w tym momencie nie zauważyć analogii pomiędzy określeniami Elliotta a omawianymi w poprzednim rozdziale cechami obiektów fraktalnych. W tym przypadku mamy do czynienia zarówno z relatywnie prostą (być może nawet nadmiernie), rekurencyjną regułą opisującą mechanizm powstawania fal, jak i kluczową cechą obiektów fraktalnych – samopodobieństwem. Ujęcie Elliotta, choć ograniczone do pewnego szczególnego przypadku zdeterminowanego podaną przezeń zasadą tworzenia fal, jest *de facto* całkowicie zbieżne z późniejszymi, formalnymi określeniami teorii rynku fraktalnego. (Zob. rys. 23, s. 45).

Mimo że teoria Elliotta wydaje się być (i w rzeczywistości jest) niezbyt skomplikowana, to jednak należy ją uznać za istotny krok ku koncepcji modelowania fraktalnego. W ocenie autora (a wbrew opiniom współczesnych apologetów twórcy teorii fal) istotną wartością w tej koncepcji jest właśnie zwrócenie uwagi na procesy samopodobne (o samopodobnych przyrostach), a nie jej rzekoma skuteczność w prognozowaniu cen akcji: „Koncepcja Elliotta zawiera szereg dodatkowych, szczegółowych uwarunkowań (...). Takie dodatkowe założenia, łącznie z obszernym zbiorem wyjątków od ogólnej teorii, znacznie utrudniają stosowanie tej analizy w praktyce i jednocześnie uniemożliwiają jakąkolwiek jej falsyfikację”⁹³. Na to, że nie można jednak dzieł jej twórcy

⁸⁹ R. Elliott: *Nature's Law. The Secret of the Universe*. [In:] R. Prechter (ed.): *The Major Works of R.N. Elliott*. New Classics Library, Gainesville 1987, s. 153.

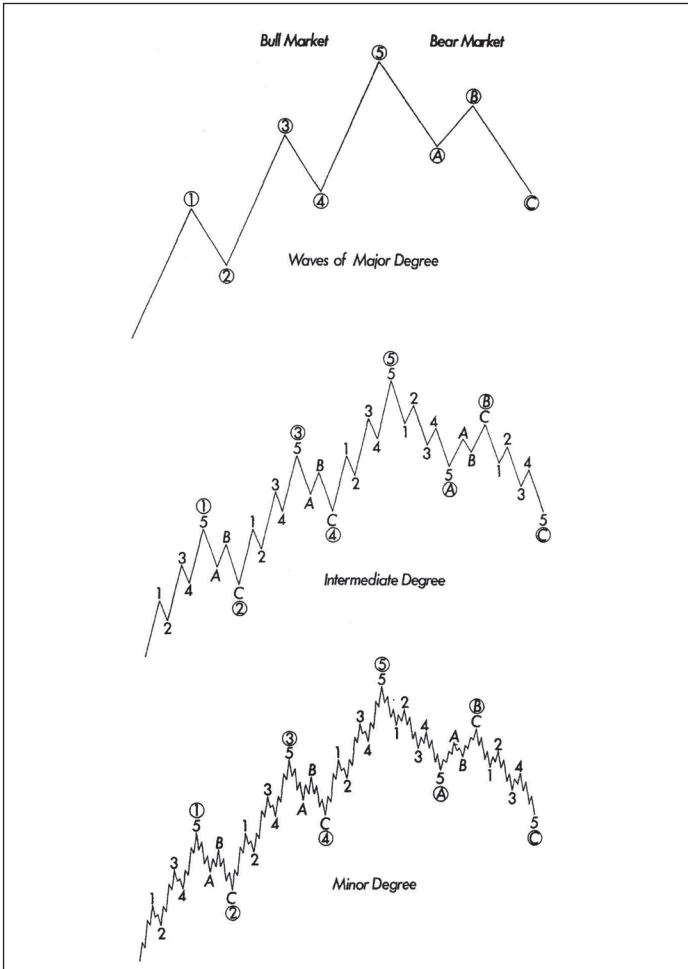
⁹⁰ J. Juzwizyn: *Ekonometryczna istota fal Elliotta*. [W:] T. Trzaskalik (red.): *Modelowanie preferencji a ryzyko '99*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 1999, s. 144–147.

⁹¹ R. Elliott: *The Wave Principle*. [In:] R. Prechter (ed.): *Op. cit.*, s. 44.

⁹² A. Mastalerz-Kodzis: *Teoria fal Elliotta a teoria fraktali – podobieństwa i różnice w podejściu do modelowania szeregów oraz opisu zachowań inwestora*. „*Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*”, nr 132/2013, s. 46.

⁹³ P. Zielonka: *O przewidywaniu cen akcji*. „*Materiały i Studia*”, nr 105/2000, s. 25–26. Warto zauważyć, że w późniejszych edycjach dzieł Elliotta Prechter zamieścił uwagi korygujące nietrafne przewidywania autora, przypisując je jednak m.in. specyficznym warunkom ekonomicznym, w których Elliott tworzył teorię fal.

traktować za przełomowe, decydujący wpływ wywiera fakt, że pozostaje ona teorią opisową i w znacznej mierze opiera się na subiektywnych odczuciach, a nie obiektywnych miarach: „Praca Elliotta nie spełnia wymagań obiektywności i powtarzalności: w jego własnym ujęciu «znaczne doświadczenie jest niezbędne do [jej] właściwej interpretacji» oraz «żadna interpretacja nie ma umocowania, jeżeli nie jest przedstawiona przez [niego lub osoby przezeń wskazane]»”⁹⁴. Z tego też względu, wbrew zdaniu Roberta Prechter⁹⁵ (mimo słuszności niektórych zarzutów⁹⁶),



Rys. 23. Samopodobieństwo fal Elliotta

Źródło: R. Elliott: *Nature's Law. The Secret of the Universe*. [In:] R. Prechter (ed.): *The Major Works of R.N. Elliott*. New Classics Library, Gainesville 1987, s. 168–169.

⁹⁴ B. Mandelbrot: Sources of inspiration and historical background. [In:] B. Mandelbrot: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, New York et al. 1997, s. 115. Antoni Smoluk określa z kolei teorię fal jako „wiedzę empiryczną o podłożu intuicyjnym” (A. Smoluk: *Giełda, fale Elliotta, stożki i walce*. [W:] *Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003*. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 2003, s. 47).

⁹⁵ Zob. Mandelbrot's Reply and Prechter's Response. <http://www.elliottwave.com/education/SciAmerican/mandelbrot-reply.aspx>.

⁹⁶ P. Harris: Was Benoît Mandelbrot Plagiarizing Ralph Elliott's Wave Principle? http://www.math.utah.edu/vigre/reu/reports/harris_fall2005.pdf.

za rzeczywistego inicjatora wykorzystania matematyki fraktalnej w ocenie ryzykowności inwestycji autor uznaje Benoît Mandelbrota.

Koncepcje Mandelbrota, w przeciwieństwie do teorii Elliotta, cechowały się precyzyjnym ujęciem formalnym. Swój pierwszy model fraktalny opisujący zachowanie cen instrumentów na rynku finansowym skonstruował on na początku lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku, wykorzystując rozkłady α -stabilne. Ze względu na słabości założenia o niezależności stóp zwrotu w kolejnych okresach posłużył się on następnie ułamkowym ruchem Browna, budując model fraktalny, w którym stopy zwrotu miały wprawdzie rozkład gaussowski, lecz cechowały się ponadto występowaniem efektu długiej pamięci. Kolejnym uogólnieniem było dopuszczenie przypadku, w którym nie tylko ceny instrumentów mają charakter stochastyczny, lecz także czas. Mandelbrot przedstawił konstrukt, w myśl którego czas na rynku finansowym płynie odmiennie niż linioowo. Złożenie fraktalnego upływu czasu handlowego oraz fraktalnych zmian cen czy stóp zwrotu zaowocowało powstaniem najpełniejszego, lecz jednocześnie najbardziej skomplikowanego (i jednocześnie trudniej falsyfikowalnego) modelu multifraktalnego. Wspomniane modele zostaną omówione w dalszej części rozdziału, jednak obecnie kluczowe jest podkreślenie fundamentalnej cechy wiążącej wszystkie te konstrukcje teoretyczne – tj. samopodobieństwa analizowanych funkcji losowych. Autor podziela bowiem opinię, że „Podejście fraktalne w finansach i ekonomii wynika z dwóch aspektów. Jednym jest głęboka wiara w istotność niezmienniczości i możliwość wykrycia stacjonarności i skalowania jako niezmiennych zasad ekonomii”⁹⁷. Dlatego też w niniejszej pracy przez teorię rynku fraktalnego autor rozumie teorię, która zakłada, że **ceny i stopy zwrotu z instrumentów finansowych są opisane co najmniej lokalnie samopodobnymi procesami stochastycznymi**⁹⁸.

Zaletą przedstawionego ujęcia (a jednocześnie jego wadą) jest fakt, że w tym podejściu teoria rynku fraktalnego jest koncepcją relatywnie pojemną. Z jednej strony umożliwia to stosunkowo swobodne modyfikowanie modeli opisujących fluktuacje na rynkach finansowych oraz odejście od sfalsyfikowanego w klasycznej postaci modelu Samuelsona-Osborne’a (jednak nie wykluczając go, zawiera się on bowiem w teorii rynku fraktalnego). Z drugiej jednak strony treść empiryczna niesiona przez tak sformułowaną teorię jest uboższa niż w przypadku wspomnianego modelu, a jej obalenie – trudniejsze. Autor nie traktuje jednak tego mankamentu jako istotnego regresu w stosunku do koncepcji omawianych uprzednio. Wydaje się bowiem, że teoria rynku fraktalnego pozwala zakreślić pewne granice teoretyczne, w których powinny mieścić się poszczególne, skonkretyzowane modele. W tym znaczeniu pretenduje ona do roli nowego paradygmatu w zakresie opisu rynków finansowych, co pozwala na stwierdzenie, że przedstawiony zarzut traci na znaczeniu.

2.1.4. Ekonomiczna istota teorii rynku fraktalnego

Ze względu na fakt, że teoria rynku fraktalnego jest teorią zmatematyzowaną, bardzo rzadko jest ona rozpatrywana w ujęciu *stricte* ekonomicznym. Z tego też względu przed prezentacją jej ilościowego ujęcia zarysowane zostaną aspekty ekonomiczne. Koncepcje szczegółowe objaśniające fluktuacje cen instrumentów finansowych zostaną przedstawione w części dalszej, po prezentacji drugiego kluczowego aspektu teorii rynku fraktalnego, polegającego na przyjęciu, że „(...) teoria prawdopodobieństwa jest bardziej uniwersalna niż zazwyczaj się sądzi” oraz „(...) stawieniu czoła wielu odmiennym «stanom losowości»”⁹⁹.

⁹⁷ B. Mandelbrot: Three Fractal Models in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. „Economic Notes”, Vol. 26, No. 2/1997, s. 188.

⁹⁸ Uwzględniając oczywiście uprzednie zastrzeżenia co do specyfiki szeregów cen i stóp zwrotu.

⁹⁹ B. Mandelbrot: Three..., op. cit., s. 188.

Interpretację ekonomiczną teorii rynku fraktalnego nadał **Edgar Peters**¹⁰⁰. Obserwując przebieg dotychczasowych zawirowań na rynkach finansowych, stwierdził on, że wszelkie gwałtowne zmiany cen są powiązane z zaburzeniami płynności¹⁰¹. Z tego też względu **płynność** uczynił on głównym czynnikiem oddziałującym na sposób zachowania uczestników rynku, a zatem także na fluktuacje cen. Ponadto istotnym aspektem jego rozważań jest **długość horyzontu inwestycyjnego** poszczególnych inwestorów. W ujęciu Petersa uczestnicy rynku są grupą heterogeniczną i różnią się długością przewidywanego okresu utrzymywania otwartych pozycji. Stan ten jest wynikiem przede wszystkim odmiennych celów, jak i warunków, w jakich znajdują się poszczególni inwestorzy. Z tego też względu nowo napływające informacje są przez nich postrzegane w odmienny sposób (co właściwie jest nieodzownym warunkiem zachodzenia wymiany na rynku papierów wartościowych). W przeciwnym wypadku handel byłby utrudniony, bowiem wszyscy uczestnicy rynku próbowaliby zawrzeć jednokierunkowe transakcje na tych samych warunkach¹⁰². Peters przyjął, że **inwestorzy wartościują pozyskiwane informacje zgodnie z długością własnego horyzontu inwestycyjnego**. Zmiany cen będą odmienne w skutkach dla uczestników o różnych horyzontach – krótkoterminowi spekulanci będą na gwałtowne fluktuacje reagować w znacznie większym stopniu (są one bowiem dla nich zdecydowanie większym zagrożeniem) niż np. fundusze emerytalne, których zobowiązania mają charakter długoterminowy, a krótkoterminowe wahania kursów praktycznie nie zagrażają ich pozycji finansowej. Co więcej, nie tylko skala zaangażowania w odpowiedzi na takie ruchy cen będzie odmienna – najprawdopodobniej przeciwny będzie także kierunek podejmowanych działań. Krótkoterminowe istotne odchylenia *in minus* od ceny sprawiedliwej będą najprawdopodobniej skłaniać spekulantów do wyprzedzaży walorów w obawie przed nadmiernymi stratami, które wobec krótkiego horyzontu inwestycyjnego mogą skutkować ich eliminacją z uczestnictwa w transakcjach na rynku kapitałowym. Z kolei jest wysoce prawdopodobne, że podmioty inwestujące długoterminowo uznają takie odchylenia za okazję do osiągnięcia ponadnormalnej stopy zwrotu, co skłoni je do wzmożonych zakupów walorów. Wynika to także z faktu, że inwestorzy krótkoterminowi relatywnie częściej kierują się wskazaniem analizy technicznej, zaś inwestorzy długoterminowi – analizy fundamentalnej i portfelowej, które w takich sytuacjach mogą skłaniać do podejmowania krańcowo odmiennych decyzji inwestycyjnych¹⁰³.

Opisany mechanizm będzie prowadził do łagodzenia szokowych zmian cen. Trzeba zatem podkreślić, że to właśnie **istnienie inwestorów o zróżnicowanych horyzontach inwestycyjnych sprawia, że rynek finansowy jest stabilny**, a kupujący jest w stanie znaleźć sprzedającego

¹⁰⁰ E. Peters: *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons, New York et al. 1994, s. 42–50.

¹⁰¹ Zob. C. Kindleberger: *Szafeństwo, panika, krach. Historia kryzysów finansowych*. WIG-Press, Warszawa 1999, s. 27 oraz C. Mackay: *Niezwykłe złudzenia i szaleństwa tłumów*. WIG-Press, Warszawa 1999. Płynność odgrywa również kluczową rolę w hipotezie niestabilności finansowej Hymana Minsky'ego (H. Minsky: *The Financial Instability Hypothesis: A Clarification*. http://digitalcommons.bard.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1144&context=hm_archive).

¹⁰² Zauważył to już Jules Regnault (J. Regnault: *Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse*. Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863), sądząc jednak, że handel byłby wówczas niemożliwy. Nie odpowiada to do końca rzeczywistości, jednak impulsy do zawierania transakcji musiałyby być wówczas niezwiązane z informacjami mogącymi mieć wpływ na ceny walorów, lecz z sytuacją, w jakiej aktualnie znajdowałby się inwestor (w postaci np. nadmiaru wolnych środków pieniężnych). Z tego względu autor preferuje raczej określenie „utrudniony”, choć skala takiego utrudnienia byłaby zapewne znaczna.

¹⁰³ Podobne podejście zaprezentował Maurice Larrain, konstruując model K-Z oraz wyróżniając odwzorowanie oddające wpływ czynników krótkoterminowych i odwzorowanie Z reprezentujące czynniki długoterminowe (M. Larrain: *Testing Chaos and Nonlinearities in T-Bill Rates*. „Financial Analysts Journal”, Vol. 47, No. 5 September-October 1991, s. 54–55, 60–62). Cztery stany rynku wyróżnił z kolei Tonis Vaga (rynek chaotyczny, koherentny, niestabilny i błędzenia losowego), jednak jego relatywnie skomplikowane podejście nie spotkało się z powszechną akceptacją (T. Vaga: *The Coherent Market Hypothesis*. „Financial Analysts Journal”, Vol. 46, No. 6 November-December 1990).

instrumenty i odwrotnie. Dopóty zatem, dopóki występują na rynku podmioty gotowe dostarczać płynność, na rynku nie powinny występować zdarzenia istotnie odbiegające od średniej. Jednak nadejście informacji podważającej dotychczasowe zapatrywania długoterminowe może sprawić, że inwestorzy o takim horyzoncie inwestycyjnym zaprzestaną dokonywania transakcji lub ich horyzont ulegnie znacznemu skróceniu. Wówczas, zdaniem Petersa, dochodzi do załamania, przy czym spadki nie wynikają z przewidywanej malejącej wartości wewnętrznej w okresie długim, lecz z gwałtownego wzrostu niepewności¹⁰⁴. Ponieważ praktycznie wszyscy uczestnicy rynku dokonują wtedy transakcji w oparciu o przewidywania krótkoterminowe, nawet relatywnie niewielkie wahania cen mogą doprowadzić do kumulacji zleceń jednego rodzaju i znaczących zmian kursów.

Rynek zatem zachowuje stabilność dopóty, dopóki poziom ryzyka ponoszonego przez inwestorów (z uwzględnieniem korekty wynikającej z odmiennej długości horyzontów inwestycyjnych) pozostaje zbliżony. Dlatego też można spodziewać się, że rozkład stóp zwrotu będzie tego samego typu, niezależnie od długości rozważanego horyzontu inwestycyjnego. Będą występowały także relatywnie krótkie okresy niestabilności, które jednak wywierają decydujący wpływ na wyniki uzyskiwane przez inwestorów¹⁰⁵. Ich przebieg będzie zbliżony do siebie. Wspomniane czynniki skłoniły Petersa do stwierdzenia, że rynek finansowy będzie cechował się występowaniem samopodobnych struktur, a zatem będzie miał charakter fraktalny. Dlatego też zaproponował, by tę koncepcję określić mianem **teorii rynku fraktalnego** (*Fractal Market Hypothesis*). Podsumowując, można stwierdzić, że opiera się ona na następujących stwierdzeniach¹⁰⁶:

- **Na rynku znajduje się wielu uczestników o zróżnicowanych horyzontach inwestycyjnych.**
- **Dla odmiennych horyzontów inwestycyjnych ta sama informacja ma różny wpływ.**
- **Dla stabilności rynku kluczowe znaczenie ma płynność.**
- **Na ceny oddziałują krótkoterminowe czynniki techniczne i długoterminowe czynniki fundamentalne.**
- **Wielkości niepowiązane z cyklem gospodarczym nie będą wykazywały długoterminowych trendów.**

Jako że w koncepcji Petersa informacja jest wartościowana zgodnie z długością horyzontu inwestycyjnego uczestników rynku finansowego, powstaje pytanie, czy owa koncepcja jest spójna z dominującą w nauce finansów teorią rynków efektywnych. W relatywnie najmniej restrykcyjnym ujęciu jej zasadnicza hipoteza brzmi: „(...) najpełniejszą definicją efektywności informacyjnej jest dążenie przez rynek akcji do niezwłocznego, poprawnego i pełnego uwzględniania wszystkich istotnych informacji w procesie kształtowania cen walorów”¹⁰⁷, co można zapisać formalnie np. jako¹⁰⁸:

¹⁰⁴ Peters wskazuje na drastycznie podwyższony poziom zmienności krótkoterminowej. Autor sądzi jednak, że właściwszym określeniem jest niepewność. Zmienność przyjęło się wiązać z pojęciem ryzyka, a nie niepewnością. Wzrost zmienności, nawet znaczny, nie uniemożliwiałby dokonania oceny scenariuszy rozwoju sytuacji na rynku, a co za tym idzie, nie prowadziłyby do skrócenia horyzontu inwestycyjnego inwestorów długoterminowych, choć mógłby skutkować spadkiem cen, np. wskutek wzrostu wymaganych stóp zwrotu. Opisywana sytuacja jest jednak krańcowo odmienna – napływające informacje tak dalece zmieniają postrzeganie czynników fundamentalnych, że wszelkie prognozowanie długoterminowe staje się praktycznie niemożliwe, a dopiero to prowadzi do rezygnacji z podejmowania transakcji bądź skrócenia horyzontu inwestycyjnego podmiotów zaangażowanych długoterminowo. Jednak wspomniany stan należałoby raczej scharakteryzować jako cechujący się zwiększoną niepewnością – a nie ryzykiem.

¹⁰⁵ B. Mandelbrot, R. Hudson: *The (mis)Behaviour of Markets*. Profile Books, London 2008, s. 233–235.

¹⁰⁶ A. Weron, R. Weron: *Fractal market hypothesis and two-power laws*. „Chaos, Solitons and Fractals”, No. 11/2000, s. 291.

¹⁰⁷ S. Buczek: *Efektywność informacyjna rynków akcji. Teoria a rzeczywistość*. SGH, Warszawa 2005, s. 14.

¹⁰⁸ Za: R. Buła: *Efektywność informacyjna a zachowanie cen akcji tworzących indeks WIG20*. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 177/2014, s. 153–157.

$$\forall_{\substack{T \in \{0,1,2,\dots\} \\ j \in \{1,2,\dots,n\}}} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \left(p_{j,t+1} \mid \Phi_T^m \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(p_{j,t+1} \mid \Phi_T \right),$$

gdzie:

Φ_t – zbiór informacyjny reprezentujący wszelkie dostępne informacje w chwili t ,

Φ_t^m – zbiór informacyjny reprezentujący wszelkie informacje uwzględniane przez uczestników rynku w chwili t , $\Phi_t^m \subseteq \Phi_t$,

$f(p_{j,t+1} \mid \Phi_T)$ – rzeczywista funkcja gęstości cen j -tego papieru wartościowego ($p_{j,t+1}$), pod warunkiem zbioru informacyjnego Φ_T rozważana dla $t = T, T+1, T+2, \dots$,

$f_m(p_{j,t+1} \mid \Phi_T^m)$ – rynkowa funkcja gęstości cen j -tego papieru wartościowego, pod warunkiem zbioru informacyjnego Φ_T^m rozważana dla $t = T, T+1, T+2, \dots$.

W rezultacie:

$$\forall_{\substack{T \in \{0,1,2,\dots\} \\ j \in \{1,2,\dots,n\}}} \lim_{m \rightarrow +\infty} E_m \left(\tilde{p}_{j,t+1} \mid \Phi_T^m \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} E \left(\tilde{p}_{j,t+1} \mid \Phi_T \right)$$

oraz

$$\forall_{\substack{T \in \{0,1,2,\dots\} \\ j \in \{1,2,\dots,n\}}} \lim_{m \rightarrow +\infty} E_m \left(\tilde{r}_{j,t+1} \mid \Phi_T^m \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} E \left(\tilde{r}_{j,t+1} \mid \Phi_T \right).$$

W sytuacji, gdy na rynku aktywni są inwestorzy o szerokim spektrum horyzontów inwestycyjnych, ceny powinny odzwierciedlać napływające informacje (lub co najmniej rynek winien dążyć do takiego stanu), ewentualne zachowania stadne są bowiem mało prawdopodobne – właśnie ze względu na opisywaną heterogeniczność zbiorowości uczestników rynku. Jeżeli rynek jest stabilny – hipoteza efektywności informacyjnej najpewniej będzie prawdziwa. W sytuacjach, gdy rynek traci ową stabilność, a inwestorzy aktywnie działający upodabniają się do siebie, prawdopodobieństwo, że ceny nie będą poprawnie odzwierciedlały nowych informacji, jest zdecydowanie większe – co jest skutkiem potencjalnego „owczego pędu”. W konsekwencji wydaje się zatem, że hipoteza rynku fraktalnego nie prowadzi do zupełnego odrzucenia teorii rynków efektywnych. Wskazuje ona jednak, że w chwilach destabilizacji rynek najpewniej efektywny nie będzie.

Odmienny model uzasadniający istnienie struktur fraktalnych na rynku kapitałowym przedstawili **Fred Kaen** oraz **Robert Rosenman** w oparciu o rozważania **Ronalda Heinera**¹⁰⁹. Ogólny model stworzony przez Heinera wykorzystywał pojęcie **luki pomiędzy kompetencjami a trudnością w podjęciu poprawnej decyzji (C-D gap)**. W tym ujęciu niepewność $u(p, e)$ jest zdefiniowana czynnikami zewnętrznymi (e) wpływającymi na złożoność problemu decyzyjnego oraz zdolnościami poznawczymi podmiotu (p). Na czynniki zewnętrzne oddziałują z kolei napływające informacje (n), tak że można zapisać¹¹⁰, iż $e(n)$. W omawianym modelu dany podmiot decyduje o podjęciu pewnego działania (np. dalszego przetrzymywania lub zakupu dodatkowych

¹⁰⁹ Za: R. Heiner: The Origin of Predictable Behavior. „The American Economic Review”, Vol. 73, No. 4 September 1983; R. Heiner: Predictable Behavior: Reply. „The American Economic Review”, Vol. 74, No. 3 June 1985; R. Heiner: Origin of Predictable Behavior: Further Modeling and Applications. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 2 May 1985; R. Bookstaber, J. Langsam: Predictable Behavior: Comment. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 3 June 1985; R. Garrison: Predictable Behavior: Comment. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 3 June 1985.

¹¹⁰ Kaen i Rosenman zakładają, że nowe informacje powodują zmniejszenie złożoności warunków, w których podejmowana jest decyzja ($e' < 0$). Zdaniem autora podejście to nie jest słuszne, mogą one bowiem skutkować także jego zwiększeniem – np. poprzez sfalsyfikowanie pewnej hipotezy wobec braku innej tłumaczącej analizowane zależności (zob. F. Kaen, R. Rosenman: Predictable Behavior in Financial Markets: Some Evidence in Support of Heiner's Hypothesis. „The American Economic Review”, Vol. 76, No. 1 March 1986, s. 213).

akcji), przy czym w danym stanie świata prawdopodobieństwo, że warunki będą sprzyjające dla tego działania wynosi $\pi(e)$. Z kolei warunkowe prawdopodobieństwo, że w rzeczywistości podejmie on owo działanie w sprzyjającej sytuacji uwarunkowane jest poziomem niepewności i dane jako $r(u)$. Warunkowe prawdopodobieństwo, że wspomniane działanie zostanie podjęte w warunkach niesprzyjających wynosi $w(u)$ (przy czym $r'(u) < 0$ oraz $w'(u) > 0$). Zysk osiągnięty w sytuacji pierwszej to $g(e)$, zaś strata w stanie drugim – $l(e)$. Przeciętny wynik, jaki osiągnie inwestor, wynosi zatem:

$$g(e)r(u)\pi(e) - l(e)w(u)[1 - \pi(e)].$$

W opisanych okolicznościach powinien on decydować się na podjęcie decyzji dopóki spełniony jest tzw. **warunek wiarygodności** sformułowany przez Heinera¹¹¹:

$$g(e)r(u)\pi(e) - l(e)w(u)[1 - \pi(e)] > 0,$$

tj. gdy:

$$\frac{r(u)}{w(u)} > \frac{l(e)}{g(e)} \cdot \frac{1 - \pi(e)}{\pi(e)}.$$

Stosunek $R(p, e) = \frac{r(u)}{w(u)}$ jest nazywany **współczynnikiem wiarygodności** i wyraża on stosunek prawdopodobieństw podjęcia działania w warunkach sprzyjających i niesprzyjających. Z kolei relacja $T(e) = \frac{l(e)}{g(e)} \cdot \frac{1 - \pi(e)}{\pi(e)}$ bywa określana mianem **limitu tolerancji**. Dopóki współczynnik wiarygodności przekracza limit tolerancji, dopóty dla inwestora korzystne jest rozważanie podjęcia działania.

W odniesieniu do rynków finansowych limit tolerancji można traktować jako wyróżnik, czy cena danego instrumentu jest odpowiednia w stosunku do ponoszonego ryzyka. Jeżeli bowiem uznać, że $\pi(e)$ jest prawdopodobieństwem, iż instrument przynosi zysk netto, a $1 - \pi(e)$ – stratę netto, to oczekiwany wynik wyniesie:

$$g(e)\pi(e) - l(e)[1 - \pi(e)].$$

Wtedy instrument będzie dobrze wyceniony, gdy:

$$g(e)\pi(e) - l(e)[1 - \pi(e)] = 0,$$

tj. gdy:

$$T(e) = 1,$$

niedowartościowany, gdy:

$$T(e) \in (0, 1),$$

zaś przewartościowany gdy:

$$T(e) > 1.$$

Następnie zakładamy, że w pewnym momencie instrument jest niedowartościowany, a problematyczną decyzją jest decyzja o jego dalszym utrzymywaniu w portfelu lub zakupie (analogiczne rozważania można przeprowadzić dla przypadku, gdy jest on przewartościowany a decyzja dotyczy sprzedaży). Przyjmujemy, że napływające informacje są publicznie znane, natychmiast docierają do wszystkich uczestników rynku i konkretyzują wiedzę inwestorów odnośnie do przyszłego rozkładu stóp zwrotu, tak że $e(n)$ jest malejącą funkcją n . Szeregujemy N inwestorów

¹¹¹ R. Heiner: The Origin..., op. cit., s. 566.

według malejących zdolności poznawczych $p_1 > p_2 > \dots > p_N$, co implikuje, że $u_1 < u_2 < \dots < u_N$. Ze względu na fakt, że $r'(u) < 0$ oraz $w'(u) > 0$ mamy $R(p_1, e) > R(p_2, e) > \dots > R(p_N, e)$. Może teraz zachodzić jedna z relacji¹¹²:

- a) $T(e) > R(p_1, e) > R(p_2, e) > \dots > R(p_N, e)$,
- b) $R(p_1, e) > \dots > R(p_k, e) > T(e) > R(p_{k+1}, e) > \dots > R(p_N, e)$, $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$,
- c) $R(p_1, e) > R(p_2, e) > \dots > R(p_N, e) > T(e)$.

W pierwszym przypadku żaden z inwestorów nie będzie skłonny utrzymywać ani nabywać analizowanego instrumentu, a zatem nie nastąpi proces dostosowania cen. Dopiero napływające nowe informacje potwierdzające fakt niedowartościowania instrumentu sprawią, że wzrosną współczynniki wiarygodności i relacja druga będzie spełniona. W przypadku trzecim wszyscy inwestorzy wyrażą chęć dalszego utrzymywania lub zakupu instrumentu, co sprawi, że jego cena wzrośnie, a tym samym wzrośnie $l(e)$ przy zmniejszeniu się $g(e)$ oraz spadku $\pi(e)$, co doprowadzi do wzrostu $T(e)$ i wówczas albo instrument stanie się dobrze wyceniony, albo prawdziwa będzie relacja druga. Przypadek pierwszy i trzeci prowadzą zatem do sytuacji, w której $R(p_1, e) > \dots > R(p_k, e) > T(e) > R(p_{k+1}, e) > \dots > R(p_N, e)$, $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. W pewnym momencie napływ informacji potwierdzających fakt niedowartościowania instrumentu sprawi, że liczba inwestorów pragnących nabyć go będzie na tyle duża, że spowoduje to wzrost cen i zwiększenie limitu tolerancji. Jednocześnie dopóki instrument będzie niedowartościowany, będą najprawdopodobniej pojawiać się dalsze informacje utwierdzające inwestorów w tym przekonaniu, co sprawi, że zwiększać się będą zarówno współczynniki wiarygodności, jak i liczba inwestorów, dla których współczynnik wiarygodności przekracza limit tolerancji. Początkowo wzrost ceny oraz limitu tolerancji będzie relatywnie niewielki (ze względu na nieliczną grupę inwestorów, dla których $R(p, e) > T(e)$), a szybszy będzie przyrost współczynników wiarygodności i w efekcie liczby inwestorów, dla których przekraczają one $T(e)$. W rezultacie coraz większa liczba generujących dodatkowy popyt będzie zgłaszała chęć kupna, co spowoduje przyspieszenie wzrostu ceny i limitu tolerancji. Ponieważ $T(e)$ będzie zbliżać się do jedności, napływ informacji świadczących o niedowartościowaniu instrumentu będzie słabł. Układ będzie stopniowo zbliżał się do stanu równowagi wyznaczonego przez $T(e) = 1$. Proces dostosowania ceny nie będzie jednak natychmiastowy, lecz powolny i rozłożony w czasie. W sytuacji, gdy inwestorzy dysponują doskonałymi zdolnościami poznawczymi (tj. $r(u) = 1$, $w(u) = 0$), współczynnik wiarygodności dąży do nieskończoności, a dostosowanie cenowe następuje natychmiast. Wówczas fluktuacje cen będą odpowiadały ściśle napływowi informacji bez opóźnień w czasie. W sytuacji opisanej powyżej proces dostosowań cenowych będzie rozłożony w czasie i długotrwały, a co więcej będzie cechował się długą pamięcią – wpływ poszczególnych informacji na cenę akcji będzie ujawniał się nie tylko w chwili otrzymania przez rynek nowej informacji, lecz także w relatywnie długim okresie po wystąpieniu tego zdarzenia.

Istnienie efektu długiej pamięci jest kluczową cechą opisującą jeden z wykorzystanych przez Mandelbrota w modelowaniu fraktalnym procesów stochastycznych – fraktalnym ruchu Browna. Wydaje się zatem, że przedstawiony model luki pomiędzy kompetencjami a złożonością problemu jest w stanie satysfakcjonująco wyjaśnić na gruncie teorii ekonomii pojawiające się zależności długozasięgowe w danych empirycznych, a jednocześnie jest on komplementarny do modelu Petersa tłumaczącego dość zadowalająco występowanie załamania i zdarzeń ekstremalnych na rynkach finansowych. Z tego też względu żadnemu z opisanych wyjaśnień nie można przyznać prymatu, jednak wydaje się, że współwystępowanie analizowanych mechanizmów pozwala uzasadnić prawomocność teorii rynku fraktalnego.

¹¹² Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że nie istnieje takie i , że $R(p_i, e) = T(e)$, bowiem nie zmienia to istoty sprawy.

Interesujące jest także spojrzenie niebędącego ekonomistą faktycznego twórcy geometrii fraktalnej. W pierwszej kolejności formułuje on cztery zarzuty pod adresem dotychczasowych teorii¹¹³. Sugeruje błędność podejścia opartego na założeniu, że uczestnicy rynku są jednostkami racjonalnymi, dążącymi do maksymalizacji bogactwa, powołując się na osiągnięcia teorii finansów behawioralnych. Postuluje także odrzucenie warunku głoszącego, że inwestorzy są generalnie rzecz biorąc podmiotami o zbliżonych cechach, co sprawia, że podobnie reagują na napływające informacje. W rzeczywistości bowiem inwestorzy są grupą silnie heterogeniczną, a ich odpowiedzi na bodźce zewnętrzne mogą być diametralnie odmienne. Ponadto Mandelbrot zwraca się przeciwko założeniu o ciągłości zmian cen, argumentując, że bywają one tak gwałtowne, że w ciągu kilku dni mogą zneutralizować przyrost wartości inwestycji trwających kilka – kilkanaście lat. Stanowi to dodatkowy argument przeciw korzystaniu z rozkładu gaussowskiego. Swoje zalecenia związane z przyszłą teorią zajmującą miejsce dotychczasowej sformułował on w postaci warunków, które powinny zostać wzięte pod uwagę przy konstruowaniu takiej teorii. Najistotniejsze jest stwierdzenie, że rynki finansowe mają charakter turbulentny, a poziom ryzyka jest daleko większy, niż wskazywałyby dotychczasowe modele. Co więcej, zmiany cen mogą mieć także charakter nieciągły, co sprawia, że dla potencjalnego inwestora niezmiernie istotne staje się tzw. „wycucie rynku” – albowiem w skumulowanych wynikach dominujący udział mają stopy zwrotu osiągnęte w bardzo krótkich okresach. Wynika to m.in. z faktu, że czas na rynkach finansowych wydaje się płynąć w zmiennym tempie¹¹⁴. Jednocześnie Mandelbrot nie sugeruje, by możliwe było pokonanie rynku – przyjmuje on, że na rynkach panuje znaczna niepewność, a wszelkie prognozy są złudne. Mimo to, ze względu na fakt, że rynki funkcjonują podobnie niezależnie od położenia i okresu, możliwe jest oszacowanie ryzykowności inwestycji. W tym celu dotychczasowe narzędzia nie są jednak dostatecznie pomocne. Dlatego też konieczne jest odwołanie się do metod wypracowanych w oparciu o założenie, że rynki finansowe mają charakter fraktalny.

Zaprezentowane rozważania pozwalają traktować istnienie struktur fraktalnych na rynkach finansowych za prawdopodobne, nie określają jednak, jakimi własnościami cechują się dotychczas wykorzystywane mierniki ryzyka i czy zachowują one swoją użyteczność w całkowicie zmienionych warunkach (w stosunku do sytuacji zadanej modelem Samuelsona-Osborne’a). Ponadto nie jest sprecyzowane, jakie potencjalne prawa mogą rządzić fluktuacjami cen instrumentów, co dodatkowo utrudnia wnioskowanie. Z tego też względu kolejnym krokiem jest przedstawienie rozmaitych typów losowości oraz określenie, które z nich mają zastosowanie w przypadku przyjęcia teorii rynku fraktalnego za obowiązującą.

2.1.5. Pojęcie losowości w teorii rynku fraktalnego

Ze względu na przyjęty pogląd o poprawności podejścia związanego z traktowaniem cen i stóp zwrotu z instrumentów finansowych jako wielkości o charakterze stochastycznym, a nie deterministycznym, osią prezentowanych rozważań jest **pojęcie losowości**¹¹⁵. Dla dalszego wywodu istotne jest rozróżnienie dokonane przez Mandelbrota. Podsumowując swoje wieloletnie badania, skonstruował on typologię losowości, wyodrębniając trzy jej rodzaje: losowość typu *mild*,

¹¹³ B. Mandelbrot, R. Hudson: Op. cit., s. 82–87, 227–252.

¹¹⁴ Spostrzeżenie to doprowadziło do wprowadzenia rozróżnienia między czasem rzeczywistym a czasem handlowym (zob. np. H. Zawadzki: *Multifraktale i rynki finansowe*. [W:] P. Chrzan (red.): *Metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne w finansach i ubezpieczeniach*. Cz. 2. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2006).

¹¹⁵ Szerzej o rozumieniu terminu losowość i pokrewnych pisze m.in. D. Mitrenga: *Metodyczne podstawy symulacji stochastycznej Monte Carlo*. „*Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*”, nr 204/2014, s. 165–167.

losowość typu *slow* oraz losowość typu *wild*¹¹⁶. Mandelbrot opisuje je jako „stany”, przy czym „Określenie «stan» jest starannie dobrane. Jego istniejące konotacje odnoszą się do gazów, ciał stałych i cieczy (...)”¹¹⁷. Najtrafniejszym porównaniem oddającym ideę wspomnianej klasyfikacji jest traktowanie losowości typu *mild* jako będącej analogią stanu gazowego, tj. cechującą się brakiem określonych struktur i bardzo słabymi zależnościami pomiędzy poszczególnymi cząsteczkami. Z kolei losowość typu *wild* można scharakteryzować w podobny sposób jak ciała stałe – w jej przypadku występują długoterminowe zależności i struktury. Stanem pośrednim są ciecze – odpowiadające losowości typu *slow*, zachowujące się w niektórych warunkach jak gazy, a w innych jak ciała stałe. Bardziej precyzyjnie omawianą klasyfikację można scharakteryzować za pomocą kryterium opierającego się na relatywnym wpływie poszczególnych zmiennych losowych na ich sumę. W tym celu wykorzystuje się współczynniki koncentracji, pozwalające określić, czy żadna ze zmiennych losowych tworzących sumę nie dominuje (*evenness*), czy też zachodzi sytuacja przeciwna (*concentration*). Z losowością typu *mild* mamy do czynienia, gdy zarówno w okresie krótkim, jak i długim nie występuje dominacja żadnej ze zmiennych losowych. Z kolei gdy suma jest majoryzowana przez pewien składnik zarówno w okresie krótkim, jak i długim, wówczas mówimy o losowości typu *wild*. Jeżeli zachodzi niezgodność pomiędzy zachowaniem dla różnych horyzontów czasowych (tj. w okresie krótkim taka dominacja występuje, zaś w okresie długim – nie), wtedy w myśl zaleceń Mandelbrota określa się losowość jako typu *slow*. Przypadki, w których dla wielkich ilości zmiennych losowych występuje zanikanie wpływu poszczególnych składników, zbiorczo można nazwać losowością pregaussowską (*preGaussian randomness*, tj. typu *mild* i *slow*), zaś takie, w których dla niewielkiej liczby zmiennych losowych ów wpływ utrzymuje się, losowością o długich ogonach (*long-tailed randomness*, tj. typu *slow* i *wild*).

Formalnie można stwierdzić, że losowość ma charakter pregaussowski, jeżeli dla ciągu sum zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie $\left(\sum_{n=1}^N X_n\right)$ możliwe jest dobranie takich ciągów (a_N) oraz (b_N) , że ciąg $\left(a_N \left(\sum_{n=1}^N X_n - b_N\right)\right)$ dąży do pewnej granicy¹¹⁸. Warunek ten może nie być spełniony, m.in. gdy wariancja zmiennych losowych jest nieskończona lub występuje pomiędzy nimi długoterminowa zależność. Z kolei w celu odróżnienia losowości typu *mild* oraz *slow* wykorzystuje się stosowne miary – współczynnik koncentracji według mody i współczynnik koncentracji według prawdopodobieństwa.

W najprostszym ujęciu przez okres krótki rozumiemy *de facto* dwa kolejne okresy, a zatem rozpatrujemy sumę dwóch niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Jej gęstość uzyskuje się jako spłot $p_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)p(x-u)du$. Wówczas warunkową gęstość składowej zmiennej losowej przy znanej wartości sumy, daną jako $\frac{p(u)p(x-u)}{p_2(x)}$ określa się jako *portioning*

¹¹⁶ Autorowi nie udało się stwierdzić istnienia stosownych odpowiedników polskich. Roboczo można przetłumaczyć określenia Mandelbrota jako losowość łagodną, losowość wolnozmienną oraz losowość gwałtowną. Ponieważ jednak sformułowania powyższe nie wydają się fortunne (choć są zdaniem autora najbardziej adekwatne spośród rozpatrywanych), postanowiono posługiwać się określeniami angielskimi.

¹¹⁷ B. Mandelbrot: States of randomness from mild to wild, and concentration from the short to the long run. [In:] B. Mandelbrot: Fractals..., op. cit., s. 121.

¹¹⁸ Wybór $a_N = \frac{1}{N}$, $b_N = 0$ prowadzi do praw wielkich liczb i granicy nielosowej, zaś $a_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$, $b_N = N EX$ do centralnego twierdzenia granicznego (ibid., s. 127).

ratio. Jeżeli badać, w jakim punkcie gęstość warunkowa jest maksymalna (jako że często punkty z jego otoczenia determinują wartości powyższej całki), wówczas współczynnik ów przybiera nazwę współczynnika koncentracji według mody. Gdy funkcja $\ln p(u)$ jest wklęsła w całej dziedzinie, to żadna ze zmiennych składowych nie dominuje, natomiast jeżeli funkcja ta jest wypukła, to zachodzi przypadek przeciwny – koncentracji (według mody). W sytuacji, gdy zachowanie funkcji jest zmienne w dziedzinie, wówczas w niektórych przedziałach mamy do czynienia z koncentracją, a w innych – nie¹¹⁹.

Dla rozkładów określonych jako cechujące się koncentracją według mody w krótkim okresie można wyróżnić klasę rozkładów charakteryzujących się koncentracją według prawdopodobieństwa. Możemy bowiem przedstawić spłot gęstości jako:

$$p_2(x) = \int_0^{\tilde{x}} p(u)p(x-u)du + \int_{\tilde{x}}^{x-\tilde{x}} p(u)p(x-u)du + \int_{x-\tilde{x}}^x p(u)p(x-u)du = I_L + I_0 + I_R.$$

Można przyjąć, że zmienna losowa cechuje się koncentracją według prawdopodobieństwa, jeżeli możliwe jest dobranie takiego \tilde{x} , że dla $x \rightarrow +\infty$:

a) względne prawdopodobieństwo dla przedziału $(\tilde{x}, x - \tilde{x})$ dane jako $\frac{I_0}{p_2(x)}$ dąży do zera,

b) względna długość przedziału $\frac{x - 2\tilde{x}}{x}$ nie dąży do zera.

Gdy dodatkowo względna długość przedziału dąży do jedności, wówczas koncentracja zachodzi prawie na pewno, zaś z wyjątkowo długimi ogonami rozkładów możemy spotkać się, gdy dąży ona do granicy mniejszej od jedności bądź ogranicza się do przedziału $(0,1)$.

Prócz powyższych kryteriów innym często stosowanym jest warunek dotyczący zachowania funkcji gęstości w sytuacji sumowania zmiennych losowych (*tail-preservation criterion*). Oznaczając przez $P_N(x) = P\left(\sum_{n=1}^N X_n > x\right)$, można go zapisać następująco:

$$P_N(x) \sim N P(x).$$

Dla okresu krótkiego ($N = 2$) warunek ten przybiera postać:

$$P_2(x) \sim 2 P(x).$$

Przytoczone kryteria pozwalają lepiej zrozumieć istotę poszczególnych stanów losowości, a nawet dokonywać bardziej subtelnych rozróżnień¹²⁰.

Powszechnie wykorzystywany w modelowaniu finansowym logarytmicznych stóp zwrotu rozkład normalny i oparty na jego zastosowaniu arytmetyczny ruch Browna należą do stanu określonego jako losowość typu *mild*¹²¹. Z punktu widzenia analitycznego wybór ten jest niezwykle dogodny, jako że własności rozkładu zostały dogłębnie zbadane, a ponadto występuje on jako rozkład graniczny w wielu twierdzeniach (np. Laplace'a, Lindeberga-Fellera, Lévy'ego, Lapunowa czy Rajkowa¹²²). To właśnie relatywna prostota modelu Samuelsona-Osborne'a istotnie przyczyniła się do niezwykle szybkiego i owocnego rozwoju modelowania stochastycznego w finansach oraz

¹¹⁹ Możliwa jest także sytuacja, gdy funkcja $\ln p(u)$ jest liniowa. Jest to przypadek szczególny, który pozwala stwierdzić, że wprowadzona klasyfikacja nie jest pełna.

¹²⁰ Mandelbrot skonstruował także bardziej precyzyjną klasyfikację, dokonując podziału losowości na siedem stanów: *proper mild randomness, borderline mild randomness, slow randomness with finite and delocalized moments, slow randomness with finite and localized moments, pre-wild randomness, wild randomness, extreme randomness*, która uściśla przedstawioną typologię trzyklasową (zob. B. Mandelbrot: *States...*, op. cit., s. 140–141).

¹²¹ Właściwą podklasą jest tu *proper mild randomness*, wyróżniająca się największym stopniem regularności spośród analizowanych (zob. przyp. 120).

¹²² W. Gliwenko: *Rachunek prawdopodobieństwa*. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1953, s. 162–191.

rozwinęcia teorii wyceny aktywów. Tym niemniej nieadekwatność wypracowanego aparatu w warunkach wzrastającej turbulencji na rynkach finansowych staje się coraz bardziej widoczna¹²³. Wydaje się, że w chwili obecnej mamy do czynienia z Kuhnowskim kryzysem dotychczasowego paradygmatu spowodowanym anomaliami o charakterze zewnętrznym¹²⁴. Ponieważ jednak „(...) kryzysy są koniecznym warunkiem wstępnym pojawiania się nowych teorii”¹²⁵ i warunkują opracowanie (bądź dostrzeżenie istotnych zalet) teorii o statusie potencjalnego nowego paradygmatu, jest prawdopodobne, że obecne narastające problemy w rozważanej dziedzinie przyniosą zmianę dotychczasowego paradygmatu. Zdaniem autora wszelkie cechy predestynujące do zajęcia jego miejsca wykazuje teoria rynku fraktalnego.

Dotychczasowe próby wypracowania nowych modeli kształtowania się cen aktywów i metod oceny ryzyka inwestycyjnego w ramach istniejącego paradygmatu autor ocenia jako niedostatecznie satysfakcjonujące. W piśmiennictwie pojawiło się wiele modyfikacji (także daleko idących), jednak ich zasadniczą słabością jest nie tylko nadmierne przywiązanie do tradycyjnych koncepcji, lecz także ich mnogość. Fakt ten w znacznej mierze utrudnia dokonanie właściwego wyboru stosownego miernika ryzyka inwestycyjnego, którym nadal bardzo często pozostaje odchylenie standardowe stopy zwrotu oraz miary mu pokrewne. W efekcie wypracowane modele cząstkowe często mają znaczenie wyłącznie teoretyczne, tym bardziej że nie odzwierciedlają one złożoności zjawisk losowych typu *wild* i *slow*¹²⁶. Tymczasem powszechnie znanym fenomenem jest zjawisko polegające na występowaniu długich ogonów (*long-tailedness*) oraz zależności długookresowych¹²⁷, właściwych tym stanom losowości. Z tego też względu w dalszej części monografii omówione zostaną koncepcje współtworzące teorię rynku fraktalnego oraz miary oceny ryzyka inwestycyjnego przez nią implikowane. Ponadto zostanie podjęta próba skonstruowania właściwej metodyki oceny ryzyka w oparciu o te mierniki.

2.1.6. Rozkłady α -stabilne w teorii rynku fraktalnego

Prekursorem zastosowania rozkładów stabilnych¹²⁸ w naukach ekonomicznych (a także przyrodniczych) był wspomniany już Mandelbrot. Czynnikiem motywującym do ich wykorzystania było przekonanie o słabościach paradygmatu gaussowskiego i jego nieadekwatności w wielu przypadkach. Wśród naturalnych kandydatów do zastąpienia rozkładu normalnego znalazła się klasa rozkładów α -stabilnych, reprezentujących losowość typu *wild*, będących uogólnieniem rozkładu

¹²³ Zob. np. w odniesieniu do rynku akcji E. Fama: *The Behavior of Stock-Market Prices*. „The Journal of Business”, Vol. 38, No. 1 January 1965, s. 40–68; B. Fielitz, E. Smith: *Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 67, No. 340 December 1972, s. 813–814; A. Lo, C. MacKinlay: *Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test*. „The Review of Financial Studies”, Vol. 1, No. 1 Spring 1988, s. 50–56; w odniesieniu do rynków towarowych R. Stevenson, R. Bear: *Commodity Futures: Trends or Random Walks?* „Journal of Finance”, Vol. 25, No. 1 March 1970, s. 69–74; w przypadku rynków walutowych M. Corazza, A. Malliaris: *Multifractality in Foreign Currency Markets*. „Multinational Finance Journal”, Vol. 6/2000; dla wielkości makroekonomicznych J. Carlson: *Are Price Expectations Normally Distributed?* „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 70, No. 352 December 1975.

¹²⁴ Za: M. Heller: *Filozofia nauki*. Wprowadzenie. Petrus, Warszawa 2009, s. 76.

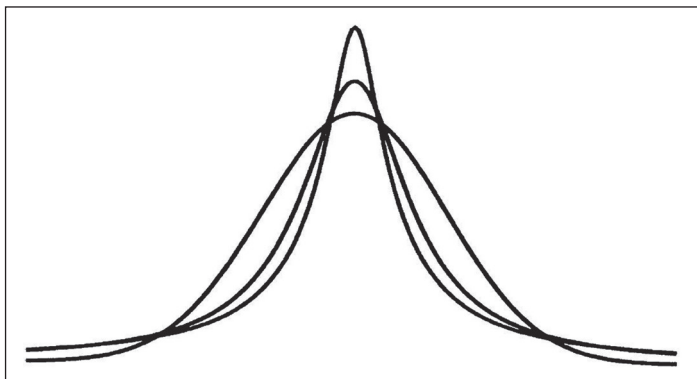
¹²⁵ T. Kuhn: *Struktura rewolucji naukowych*. Aletheia, Warszawa 2009, s. 141.

¹²⁶ W tym świetle przywiązanie praktyków do miar ryzyka implikowanych przez model Samuelsona-Osborne’a nie wydaje się bezzasadne, są one bowiem stosunkowo nieskomplikowane w sensie rachunkowym, a przyrost użyteczności w wyniku stosowania miar opartych na jego modyfikacjach nie wydaje się równoważyć ponoszonych kosztów.

¹²⁷ Zob. np. E. Fama, K. French: *Permanent and Temporary Components of Stock Prices*. „The Journal of Political Economy”, Vol. 96, No. 2 April 1988; J. Teichmoller: *A Note on the Distribution of Stock Price Changes*. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 66, No. 334 June 1971.

¹²⁸ Rozkłady te nazywa się także rozkładami Pareto, Pareto-Lévy’ego czy też stabilnymi Pareto. W niniejszej monografii konsekwentnie będą one określane mianem rozkładów α -stabilnych.

de Moivre’a-Gaussa-Laplace’a. Dlatego też mniejszą wagę przykładał Mandelbrot do szczegółowego opisu statystycznego badanych wielkości, koncentrując się raczej na uniwersalności i możliwości jego zastosowania w rozmaitych naukach i problemach badawczych¹²⁹.



Rys. 24. Funkcje gęstości rozkładów α -stabilnych: normalnego i bardziej wysmukłych

Źródło: B. Mandelbrot: *Fractal Financial Fluctuations*. [In:] N. Lesmoir-Gordon (ed.): *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, London 2010, s. 125.

Idea posłużenia się zmiennymi stabilnymi wynikała z obserwacji faktu, iż rzeczywiste szeregi czasowe cechują się zdecydowanie podwyższonym poziomem koncentracji. Zjawisko leptokurtyczności empirycznych rozkładów prawdopodobieństwa zaobserwowano już w drugiej i trzeciej dekadzie XX wieku¹³⁰, w stopniu oczywiście przeczącym hipotezie głoszącej, że zmiany cen (absolutne czy relatywne) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gaussowskim. Mimo to niezaprzeczalne zalety analityczne modelu Samuelsona-Osborne’a w porównaniu z koncepcją Mandelbrota, który „(...) jak niegdyś premier Churchill obiecuje nam nie utopię, lecz krew, pot, trud i łzy”¹³¹, sprawiły, że pierwszy model Mandelbrota nie zyskał początkowo powszechnego uznania. Wynikało to najpewniej z faktu podniesionego przez Eugene’a Fama i Richarda Rolla:

„Ekonomiści, psychologowie i socjologowie często odrzucają inne niż normalny rozkłady stabilne, ponieważ:

- a. Nie mogą uwierzyć, że procesy generujące ceny, załamania, zaburzenia mogą nie mieć [skończonych] momentów rzędu drugiego (...); oraz
- b. Często obserwowane «grube ogony» cechujące rozkłady empiryczne mogą być generowane przez np. odpowiednie procesy będące mieszankami rozkładów normalnych (...)¹³².

Powtórne zainteresowanie ową koncepcją przypada na lata dziewięćdziesiąte ubiegłego wieku, głównie za sprawą pojawienia się nowej dziedziny wiedzy – ekonofizyki¹³³, gdzie znalazła ona szerokie zastosowania.

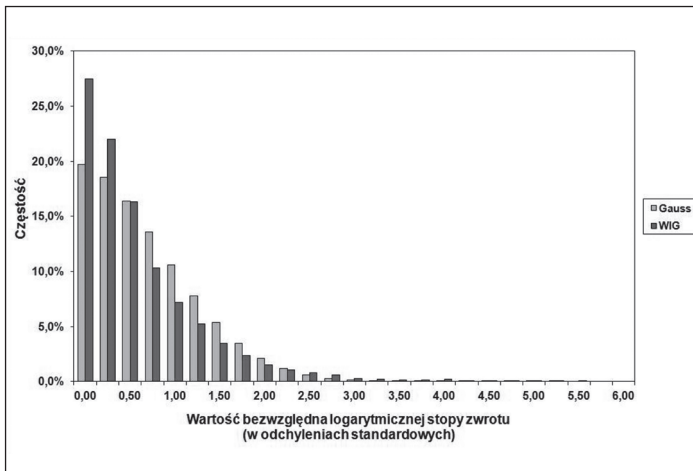
¹²⁹ B. Mandelbrot: *The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income*. „International Economic Review”, Vol. 1, No. 2 May 1960, s. 79. Rozkłady o grubych ogonach wykorzystywał on m.in. do badania zjawisk tak odmiennych jak zakłócenia w przekazie telefonicznym czy szkody powstałe w wyniku pożarów (zob. J. Berger, B. Mandelbrot: *A New Model for Error Clustering in Telephone Circuits*. „IBM Journal of Research and Development”, Vol. 7, No. 3 July 1963 oraz B. Mandelbrot: *Random Walks, Fire Damage Amount and other Paretian Risk Phenomena*. „Operations Research”, Vol. 12, No. 4 July-August 1964).

¹³⁰ Za: B. Mandelbrot: *The Variation of Certain Speculative Prices*. „The Journal of Business”, Vol. 36, No. 4 October 1963, s. 394–395, przyp. 3.

¹³¹ P. Cootner: *Comments on the Variation of Certain Speculative Prices*. [In:] P. Cootner (ed.): *The Random Character of Stock Market Prices*. The M.I.T. Press, Cambridge 1964, s. 337.

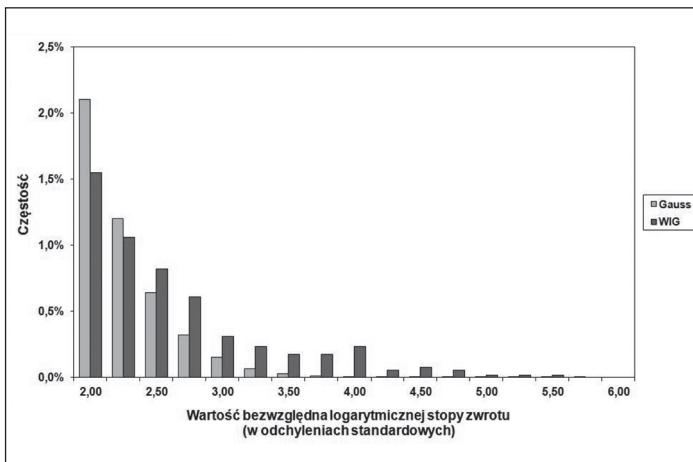
¹³² E. Fama, R. Roll: *Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions*. „Journal of American Statistical Association”, Vol. 66, No. 334 June 1971, s. 337.

¹³³ S. Borak, A. Misiorek, R. Weron: *Models for heavy-tailed asset returns*. [In:] P. Čížek, W. Härdle, R. Weron (eds.): *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer, Berlin 2011, s. 34.



Rys. 25. Rzeczywisty a postulowany przez model Samuelsona-Osborne'a rozkład dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG dla cen zamknięcia (03.10.1994-05.02.2015)

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 26. Rzeczywisty a postulowany przez model Samuelsona-Osborne'a rozkład dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG dla cen zamknięcia (03.10.1994-05.02.2015) dla ogonów rozkładu

Źródło: Opracowanie własne.

Rozkłady α -stabilne zostały opisane przez matematyka francuskiego Paula Lévy'ego w latach dwudziestych, a następnie stały się przedmiotem badań m.in. Aleksandra Chinczyna. Zostały one zdefiniowane jako rozkłady o dystrybuancie $F(x)$, w przypadku których dla dowolnych $a_1 > 0$, b_1 , $a_2 > 0$, b_2 istnieją takie stałe $a > 0$, b , że spełniona jest równość:

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b),$$

gdzie przez $*$ oznaczono operator konwolucji (splotu)¹³⁴. Definicja powyższa prowadzi do następującego określenia postaci dystrybuanty za pomocą funkcji charakterystycznej:

$$\ln f(u) = i\delta u - \gamma |u|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{u}{|u|} \omega(u, \alpha) \right\},$$

¹³⁴ Za: B. Gnedenko, A. Kolmogorov: Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Addison-Wesley Publishing Company, Reading et al. 1968, s. 162 i dalsze.

gdzie: $\delta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, przy czym:

$$\omega(u, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |u|, \alpha = 1 \end{cases}.$$

Wśród rozkładów tego typu znajduje się rozkład gaussowski ($\alpha = 2$) oraz rozkład Cauchy'ego ($\alpha = 1$). W ogólnym przypadku rozkładami stabilnymi ze względu na działanie \circ nazywamy takie rozkłady, dla których¹³⁵:

$$\xi_1 \stackrel{d}{=} a_N (\xi_1 \circ \xi_2 \circ \dots \circ \xi_N) + b_N,$$

a N jest deterministyczną lub stochastyczną liczbą całkowitą większą od jednośc. W odniesieniu do finansowych szeregów czasowych, gdy ξ_k oznacza przyrost ceny lub logarytmiczną stopę zwrotu najbardziej naturalnym wyborem działania \circ jest operacja sumowania. Wówczas zmiana ceny bądź stopa zwrotu cechują się rozkładem tego samego typu niezależnie od długości rozpatrywanego horyzontu inwestycyjnego – a zatem proces cen bądź skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu ma charakter procesu o przyrostach samopodobnych. Z ekonomicznego punktu widzenia główną zaletą tej klasy procesów jest niezmienniczość ze względu na operację sumowania, której istotność szczególnie akcentował Mandelbrot¹³⁶. Z matematycznego punktu widzenia rozkłady α -stabilne stanowią niezmiernie istotną klasę rozkładów stanowiących rozwiązanie następującego problemu. Rozważmy zmienną losową:

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n,$$

gdzie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi (zespołowo) zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach. Jak udowodniono, rozkład prawdopodobieństwa może być rozkładem granicznym powyższych sum wtedy i tylko wtedy, jeżeli jest rozkładem α -stabilnym.

Powyższa własność jest istotna, jeżeli rozpatrywać kształtowanie się cen instrumentów finansowych pod wpływem bardzo wielu czynników, których wpływ jednostkowy na ich sumę jest znikomy. W przypadku klasycznym rozważano jedynie szczególny typ rozwiązania – proces gaussowski. Mandelbrot zasugerował, że cechujące się leptokurtozą rozkłady α -stabilne zdecydowanie lepiej odpowiadają rzeczywistym notowaniom niż rozkład normalny: „(...) empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa zmian cen są zazwyczaj zbyt «wysmukłe», by pochodzić z próbek z populacji gaussowskich”¹³⁷. Sugerowane ówczesznie rozwiązania problemu nie wydawały się być zadowalające¹³⁸. Do proponowanych zaliczano traktowanie zbyt wielkich zmian cen jako pewnego rodzaju „zakłóceń”, które eliminowano, by badać jedynie pozostałe obserwacje. Postępowanie to jednak prowadziło do zafałszowania obrazu rzeczywistości. Próbowano także dokonywać takich transformacji danych¹³⁹, by pozbyć się tego problemu oraz posługiwać się mieszkankami rozkładów gaussowskich, z których jeden miał relatywnie niewielki udział w mieszanke, lecz istotnie większą

¹³⁵ S. Mittnik, S. Rachev: Stable Distributions for Asset Returns. „Applied Mathematics Letters”, Vol. 2, No. 3/1989, s. 301.

¹³⁶ B. Mandelbrot: New Methods in Statistical Economics. „The Journal of Political Economy”, Vol. 71, No. 5 October 1963.

¹³⁷ B. Mandelbrot: The Variation of Certain..., op. cit., s. 394.

¹³⁸ C. Granger, D. Orr: “Infinite Variance” and Research Strategy in Time Series Analysis. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 67, No. 338 June 1972, s. 277–279.

¹³⁹ Zob. np. H. Rietz: Frequency Distributions Obtained by Certain Transformations of Normally Distributed Variates. „Annals of Mathematics”, Vol. 23, No. 4 June 1922.

wariancję. Wyjaśnienie oparte na tej metodzie okazało się być niedostateczne, a co więcej „(...) prostota modelu została unicestwiona”¹⁴⁰.

Z powyższych względów, mimo znacznych niedogodności w posługiwaniu się rozkładami α -stabilnymi (poza trzema przypadkami nieznaną jawną postać funkcji gęstości, trudności z estymacją parametrów), na tyle dobrze oddawały one podwyższoną kurtozę empirycznych rozkładów stóp zwrotu¹⁴¹, że w opinii Mandelbrota i Famy mogły zastąpić rozkład normalny. W tej sytuacji model kształtowania się cen instrumentów finansowych jest analogiczny do modelu Samuelsona-Osborne’a, lecz miast procesu Wienera wykorzystywany jest tzw. **standardowy α -stabilny ruch Lévy’ego** $L(t)$ o następujących własnościach¹⁴²:

- Z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $L(0) = 0$.
- Dla niezachodzących interwałów czasowych przyrosty procesu są zmiennymi losowymi niezależnymi.
- Przyrosty procesu $L(t) - L(s)$, $0 \leq s < t$ są zmiennymi losowymi opisanymi funkcją cha-

$$\text{rakterystyczną } \ln f(u) = -(t-s)|u|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{u}{|u|} \omega(u, \alpha) \right\}, \quad \omega(u, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |u|, & \alpha = 1 \end{cases}, \quad -1 < \beta < 1, \\ 0 < \alpha \leq 2.$$

Wówczas **proces cen** jest zadany stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dL_t.$$

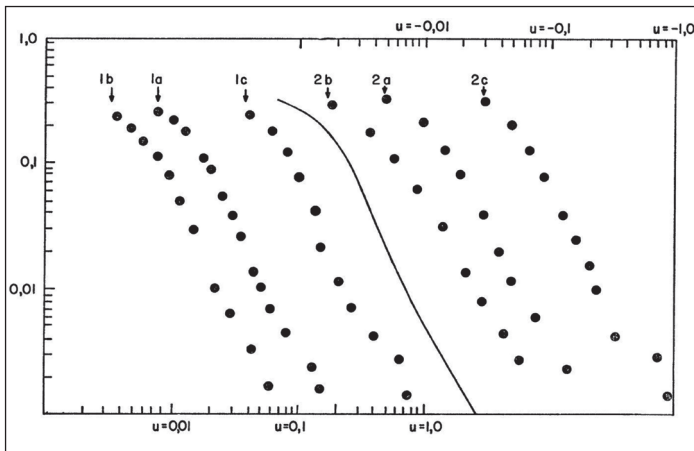
Logarytmiczne skumulowane stopy zwrotu z analizowanego instrumentu finansowego są w tym przypadku opisane procesem stochastycznym samopodobnym (jeżeli nie występuje dryf) bądź o samopodobnych przyrostach (jeżeli dryf jest niezerowy). Badany proces spełnia zatem warunek nałożony przez teorię rynku fraktalnego, a sam model został przez Mandelbrota nazwany **modelem mezofraktalnym** (Pareto-Lévy’ego-Mandelbrota)¹⁴³. Jeżeli zatem fluktuacje giełdowe są opisane za jego pomocą, to możemy uznać, że teoria rynku fraktalnego odpowiada rzeczywistości, a implikowane przez nią miary ryzyka mogą być stosowane.

¹⁴⁰ B. Mandelbrot: *The Variation of Certain...*, op. cit., s. 403. Proponowano także inne modele, wykorzystujące m.in. rozkład Studenta-Gosseta (P. Praetz: *The Distribution of Share Price Changes*. „The Journal of Business”, Vol. 45, No. 1 January 1972), rozkłady, gdzie stopa zwrotu była sumą zmiennych gaussowskich, których liczba była losowa (J. Press: *A Compound Events Model For Security Prices*. „The Journal of Business”, Vol. 40, No. 3 July 1967) czy ideę rozkładów podporządkowanych i kierujących w odniesieniu do rozkładów o skończonej wariancji (P. Clark: *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*. „Econometrica”, Vol. 41, No. 1 January 1973), jednak żaden z nich nie zdobył takiego uznania (ani nie był przyczyną tylu kontrowersji) co model Mandelbrota.

¹⁴¹ Przykładowo, dla cen bawełny współczynnik α wynosi ok. 1,7 (ibid., s. 404 oraz B. Mandelbrot: *Correction of an Error in “The Variation of Certain Speculative Prices”*. „The Journal of Business”, Vol. 45, No. 4 October 1972). Podobne zależności wykryto także dla pszenicy, cen akcji spółek kolejowych, stóp procentowych czy kursów walut (B. Mandelbrot: *The Variation of Some Other Speculative Prices*. „The Journal of Business”, Vol. 40, No. 4 October 1967). W przypadku indeksów i akcji krajowych konkluzje o wyższości rozkładów α -stabilnych nad innymi sformułowano m.in. w: D. Papla: *Przegląd rozkładów teoretycznych używanych do modelowania stóp zwrotu z akcji*. „Taksonomia. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu”, nr 1022/2004.

¹⁴² Zmodyfikowana przez autora postać podana w: W. Szczepaniak: *Modelowanie cen instrumentów finansowych przy użyciu procesów stabilnych i hiperbolicznych*. [W:] *Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe*, 4–6 września 2001. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 2001, s. 291–292.

¹⁴³ Klasyfikacja procesów na unifraktalne, mezofraktalne i multifraktalne została stworzona przez Mandelbrota w oparciu o relacje parametrów mechanizmu generującego krzywe fraktalne. Zob. B. Mandelbrot: *Scaling in financial prices*. „Quantitative Finance”, Vol. 1/2001, s. 433–436; B. Mandelbrot: *Parallel cartoons of fractal models in finance*. „Annals of Finance”, Vol. 1, No. 2 April 2005, s. 185–186.



Rys. 27. Ogony rozkładów cen pszenicy analizowanych przez Mandelbrota

Źródło: B. Mandelbrot: *The Variation of Certain Speculative Prices*. „The Journal of Business”, Vol. 36, No. 4 October 1963, s. 405.

Główną zaletą opisywanego modelu jest fakt, że odzwierciedla on leptokurtyczne własności rozkładów empirycznych. Co więcej, dla wykładników mniejszych od 2 w dowolnym przedziale skończonym prawie na pewno znajduje się nieskończenie wiele punktów nieciągłości¹⁴⁴. Ponadto, za wyjątkiem rozkładu gaussowskiego, wszystkie rozkłady α -stabilne cechują się nieskończoną wariancją. Nie wydaje się jednak, by ów fakt miał być istotną przeszkodą w wykorzystaniu procesu Lévy’ego. Należy bowiem pamiętać, że posługiwanie się wariancją i odchyleniem standardowym jako miarami ryzyka ma umocowanie w założeniach o kwadratowej funkcji użyteczności inwestora¹⁴⁵. Ponieważ założenie owo bywa często kwestionowane i w zasadzie nic nie stoi na przeszkodzie, by je odrzucić, ten argument przeciw posługiwaniu się rozkładami α -stabilnymi należy uznać za chybiony. Trzeba także stwierdzić, że poza względną prostotą modeli opartych na wariancji jako miarze ryzyka nie wydaje się, by funkcji tej równie dobrze nie mogło spełniać np. odchylenie przeciętne czy odchylenie ćwiartkowe (które istnieje dla dowolnego $0 < \alpha \leq 2$). Co więcej, zdaniem Mandelbrota, bezrefleksyjne podtrzymywanie twierdzenia o konieczności istnienia skończonego momentu rzędu drugiego może wynikać z chybionej, jego zdaniem, analogii z prawami fizyki, gdzie „(...) wiele momentów *musi* być skończonych podlegając prawom zachowania”, lecz „W ekonomii nie ma praw zachowania, tak więc nie można wykluczyć nieistnienia momentów”¹⁴⁶.

Podstawową zaletą wykorzystania procesu Lévy’ego jest to, że oddaje on fakt, iż zmiany cen na rynkach finansowych mogą być gwałtowne i nieciągłe¹⁴⁷ (Mandelbrot określił ów fenomen mianem „**efektu Noego**” – ze względu na analogię z biblijnym potopem, kiedy to ulewne deszcze padały przez czterdzieści dni i nocy, co stanowiło wyjątkową realizację zdarzeń reprezentowanych przez gruby ogon rozkładu¹⁴⁸). Za dodatkowy atut należy uznać, że można je traktować jako współwystępowanie dwóch procesów: procesu kierującego opisującego fluktuacje czasu handlowego w czasie rzeczywistym oraz procesu opisującego zachowanie stóp zwrotu, których złożenie daje

¹⁴⁴ H. McCulloch: *Continuous Time Processes with Stable Increments*. „Journal of Business”, Vol. 51, No. 4 October 1978, s. 602.

¹⁴⁵ J. Tobin: *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*. „Review of Economic Studies”, Vol. 25, No. 2/1958, s. 76–77.

¹⁴⁶ B. Mandelbrot: *“New Methods of Statistical Economics” Revisited: Short versus Long Tails and Gaussian versus Power-Law Distributions*. „Complexity”, Vol. 14, No. 3/2008, s. 59.

¹⁴⁷ E. Fama: *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*. „The Journal of Business”, Vol. 36, No. 4 October 1963, s. 426–427.

¹⁴⁸ B. Mandelbrot, J. Wallis: *Noah, Joseph, and Operational Hydrology*. „Water Resources Research”, Vol. 4, No. 5 October 1968, s. 909.

proces podporządkowany – proces stóp zwrotu w czasie rzeczywistym. Jeżeli bowiem przyjąć, że **czas handlowy** $T(t), t \geq 0$ ma rozkład o funkcji charakterystycznej¹⁴⁹:

$$\ln f_{T(t)}(u) = -\gamma t |u|^\alpha \left[1 + i \frac{u}{|u|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right]$$

dla $\gamma > 0$ oraz $\alpha \in (0, 1)$, to dla procesu Wienera (przeskalowanego, by wariancja przyrostu w jednostce czasu handlowego wynosiła σ^2) opisującego zachowanie stóp zwrotu w czasie handlowym $X(v), v \geq 0$ otrzymamy, że proces stóp zwrotu w czasie rzeczywistym $Z(t) = X(T(t))$ jest zadany rozkładem α -stabilnym o funkcji charakterystycznej:

$$\ln f_{Z(t)}(u) = -\gamma' t |u|^{2\alpha}$$

z wykładnikiem charakterystycznym wynoszącym 2α . A zatem także w tej sytuacji procesy Lévy'ego opisują ewolucję stóp zwrotu z instrumentów finansowych.

Jak wspomniano, najistotniejsze klasyczne mierniki ryzykowności inwestycji – odchylenie standardowe i wariancja stopy zwrotu – stają się bezużyteczne, jeżeli $\alpha < 2$. Zastępczo próbowano posługiwać się jako miarą ryzyka współczynnikiem γ (względnie $c = \gamma^{\frac{1}{\alpha}}$), jednak postępowanie to można uznać za słuszne jedynie w przypadku, gdy wszystkie instrumenty cechują się tym samym wykładnikiem charakterystycznym¹⁵⁰. Dla owego szczególnego przypadku Samuelson skonstruował nawet zręby teorii analogicznej do teorii Markowitza¹⁵¹, gdzie zamiast przestrzeni odchylenie standardowe (wariancja) – oczekiwana stopa zwrotu występuje przestrzeń parametrów $\gamma - \delta$. W tej przestrzeni udało się opracować modele analogiczne do jednoczynnikowego modelu Sharpe'a oraz modelu wyceny aktywów kapitałowych¹⁵², lecz nie znalazły one powszechnego zastosowania ze względu na zasadniczą ułomność fundamentalnego założenia leżącego u podstaw tej koncepcji – założenia o niezmienności wykładnika charakterystycznego.

Prócz wspomnianych już pewnych słabości analizowanego modelu Mandelbrota do jego istotnych wad należy zaliczyć fakt, że posłużono się w nim procesem o niezależnych przyrostach. Tymczasem założenie to jest powszechnie kwestionowane już od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku¹⁵³. Występowanie podobnych fenomenów w odniesieniu do zjawisk przyrodniczych skłoniło Mandelbrota do pogłębienia koncepcji zarysowanej przez hydrologa **Harolda Hursta** i wykorzystania procesu fraktalnego znanego pod nazwą ułamkowego ruchu Browna.

2.1.7. Ułamkowy ruch Browna w teorii rynku fraktalnego

Impulsem dla upowszechnienia idei ułamkowego ruchu Browna były prace Hursta poświęcone rozmaitym zjawiskom przyrodniczym – przede wszystkim wylewom rzek (głównie Nilu) analizowanym w celu określenia odpowiedniej pojemności zbiorników retencyjnych¹⁵⁴. Jego zasadniczym

¹⁴⁹ B. Mandelbrot, H. Taylor: On the Distribution of Stock Price Differences. „Operations Research”, Vol. 15, No. 6 November-December 1967.

¹⁵⁰ E. Fama, R. Roll: Some Properties of Symmetric Stable Distributions. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 63, No. 323 September 1968, s. 817.

¹⁵¹ P. Samuelson: Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments. „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, Vol. 2, No. 2 June 1967.

¹⁵² E. Fama: Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. „Management Science”, Vol. 11, No. 3 January 1965 oraz E. Fama: Risk, Return and Equilibrium. „The Journal of Political Economy”, Vol. 79, No. 1 January-February 1971.

¹⁵³ Zob. np. C. Granger: The Typical Spectral Shape of an Economic Variable. „Econometrica”, Vol. 34, No. 1 January 1966 czy C. Granger, O. Morgenstern: Spectral Analysis of New York Stock Market Prices. [In:] P. Cootner (ed.): Op. cit.

¹⁵⁴ J. Sutcliffe: Obituary. Harold Edwin Hurst: 1 January 1880 – 7 December 1978. „Hydrological Sciences Bulletin”, Vol. 24, No. 4/1979.

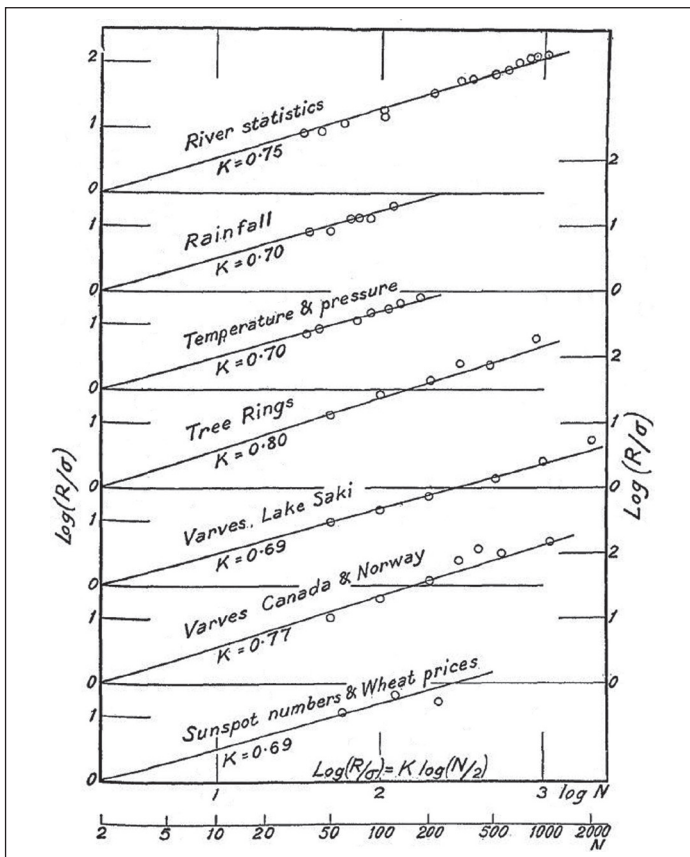
spostrzeżeniem była konstatacja, że empiryczne szeregi czasowe (ich przyrosty) nie spełniają warunku koniecznego niezależności zmiennych losowych (a także nieskorelowania), wyrażającego się równością:

$$D^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n D^2 X_i$$

a przy założeniu jednakowego rozkładu:

$$D \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = cn^{0.5}.$$

Wieloletnie badania Hursta pozwoliły mu wysnuć wniosek, że w rzeczywistości wykładnik waha się w zależności od przedmiotu badań od 0,46 do 0,96, przy przeciętnej wartości badanego współczynnika K wynoszącej 0,729¹⁵⁵.

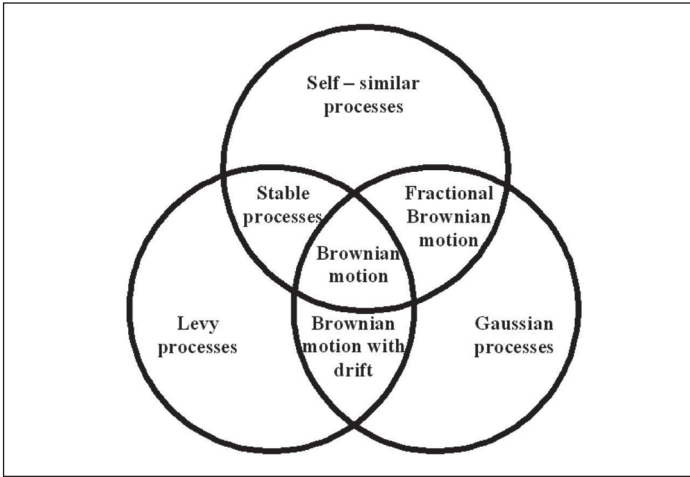


Rys. 28. Linie regresji z oszacowanym wykładnikiem K dla badanych przez Hursta zjawisk

Źródło: H. Hurst: Long-term Storage Capacity of Reservoirs. „Transactions of the American Society of Civil Engineers”, No. 116/1951, s. 787.

¹⁵⁵ Hurst rzeczony współczynnik oznaczał jako K (H. Hurst: Long-term Storage Capacity of Reservoirs. „Transactions of the American Society of Civil Engineers”, No. 116/1951, s. 784–789). Za Mandelbrotem przyjęło się oznaczać go jako H (na cześć Hursta i matematyka Otto Höldera), przy czym odmienne oznaczenie Mandelbrot motywuje ponadto zmodyfikowanym sposobem szacowania tej wielkości (B. Mandelbrot, J. Wallis: Some Long-Run Properties of Geophysical Records. „Water Resources Research”, Vol. 5, No. 2 April 1969, s. 326). W literaturze wprowadzono także współczynnik Józefa oznaczany jako J. Z formalnego punktu widzenia są to różne, nieporównywalne wielkości, należy zatem pamiętać o każdorazowym upewnieniu się co do rozumienia istoty analizowanego współczynnika.

Spostrzeżenie to sprawiło, że podał on w wątpliwość dotychczasowe, powszechnie przyjmowane założenie o niezależności zmiennych losowych opisujących wylewy Nilu w kolejnych latach: „Różnica pomiędzy statystyką R/σ dla zjawisk naturalnych i czysto losowych wynika (...) z faktu, że rozkłady zjawisk naturalnych nie są losowe. Istnieje tendencja do występowania nieregularnych sekwencji przepływów o większym lub mniejszym natężeniu w długich seriach”¹⁵⁶. Hurst nie przedstawił mechanizmu odpowiadającego za powstawanie szeregów czasowych o takich własnościach, choć zaprezentował przykład, jak można generować szeregi o zbliżonych cechach (na przykładzie losowań z talii odpowiednio dobranych kart)¹⁵⁷. Formalny model opisywanych zjawisk zyskał zainteresowanie dzięki pracy **Mandelbrota i Johna van Nessa**¹⁵⁸.



Rys. 29. Relacje pomiędzy wybranymi procesami stochastycznymi

Źródło: A. Kabašinskas, S. Rachev, L. Sakalauskas, W. Sun, I. Belovas: Alpha-Stable Paradigm in Financial Markets. <http://www.ams.sunysb.edu/~rachev/publication/review.pdf>, s. 19.

Przez **ułamkowy ruch Browna**¹⁵⁹ (*fBm – fractional Brownian motion*) o parametrze $0 < H < 1$ Mandelbrot i van Ness rozumieją rodzinę zmiennych losowych, odzwierciedlających „(...) średnią ruchomą $dB(t)$, gdzie przeszłe przyrosty $B(t)$ są ważone czynnikami $(t-s)^{H-1/2}$ ”¹⁶⁰, a $B(t)$ jest standardowym arytmetycznym ruchem Browna. Formalnie, dla danego H , $t > 0$ i punktu startowego b_0 (najczęściej $b_0 = 0$) definicja powyższa przedstawia się jako:

$$B_H(0) = b_0,$$

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right\}.$$

W przeciwieństwie do standardowego ruchu Browna, dla którego spełnione jest prawo $T^{1/2}$, dla ułamkowego procesu Browna analogiczne prawo ma postać T^H :

$$E[B_H(t+T) - B_H(t)]^2 = T^{2H} V_H,$$

¹⁵⁶ H. Hurst: Long-term..., op. cit., s. 806.

¹⁵⁷ H. Hurst: A Suggested Statistical Model of some Time Series which occur in Nature. „Nature”, Vol. 180, No. 4584 September 1957, s. 494.

¹⁵⁸ Odkrycie ułamkowego ruchu Browna jest jednak zasługą Kołmogorowa (zob. M. Taqqu: Benoît Mandelbrot and Fractional Brownian Motion. „Statistical Science”, Vol. 28, No. 1/2013, s. 1–2).

¹⁵⁹ Proces ten bywa nazywany także obciążonym błędzeniem przypadkowym (E. Peters: Teoria..., op. cit.).

¹⁶⁰ B. Mandelbrot, J. van Ness: Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. „Society for Industrial and Applied Mathematics Journal”, Vol. 10, No. 4 October 1968, s. 422.

gdzie V_H jest pewną stałą. Proces ten ma stacjonarne przyrosty oraz prawie wszystkie trajektorie ciągłe, jednak podobnie jak standardowy ruch Browna jest prawie na pewno nieróżniczkowalny. W odróżnieniu jednak od procesu Wienera ułamkowy ruch Browna jest procesem o przyrostach zależnych – przy czym zależność ta ma charakter zależności długoterminowej (mówi się w tym przypadku o tzw. „**efekcie Józefa**” – w odniesieniu do następujących po sobie okresach lat urodzajnych i nieurodzajnych¹⁶¹). Formalnie, **procesem o długiej pamięci** nazywamy taki stacjonarny proces $X(t)$, dla którego istnieje taka liczba rzeczywista $\alpha \in (0,1)$ oraz stała $c_p > 0$, że zachodzi¹⁶²:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_p k^{-\alpha}} = 1,$$

gdzie $\rho(k)$ jest współczynnikiem autokorelacji procesu ($\rho(k) = \rho[X(t+k), X(t)]$). Proces przyrostów ułamkowego ruchu Browna spełnia ów warunek dla $\frac{1}{2} < H < 1$, zatem bywa on nazywany procesem o długiej pamięci. Ponieważ jednak dla $0 < H < \frac{1}{2}$ tak nie jest, a z definicji procesu wynika, że powstaje on mimo to przez ważenie nieskończenie odległych przeszłych przyrostów ruchu Browna, Mandelbrot zaproponował odmienną klasyfikację, tzw. **C-tetrachotomię**. Jeżeli bowiem oznaczyć $C(k) = \rho(k)$ oraz $S'(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k)$, to przez:

- skończoną C-zależność rozumiemy zależność krótkookresową, tj. dla której $0 < S'(0) < \infty$,
- nieskończoną dodatnią C-zależność rozumiemy taką zależność, dla której $S'(0) = \infty$,
- nieskończoną ujemną C-zależność rozumiemy taką zależność, dla której $S'(0) = 0$,
- nieokreśloną C-zależność rozumiemy taką zależność, dla której $S'(0)$ jest nieokreślone¹⁶³.

Ponieważ dla $\frac{1}{2} < H < 1$ zachodzi $S'(0) = \infty$ zatem procesy o długiej pamięci w ujęciu Berana są dodatnio nieskończenie C-zależne w typologii Mandelbrota (korelacje są dodatnie). Ponieważ jednocześnie dla $0 < H < \frac{1}{2}$ zachodzi $S'(0) = 0$, zatem proces przyrostów ułamkowego ruchu Browna o wykładniku H mniejszym od $\frac{1}{2}$ jest procesem ujemnie nieskończenie C-zależnym (korelacje są ujemne). Dla $H = \frac{1}{2}$ $S'(0)$ jest skończone i większe od zera, a zatem zależność

¹⁶¹ R. Clarkson: A Fractal Probability Distribution for Financial Risk Applications. http://www.actuaries.org/EVENTS/Congresses/Cancun/afir_subject/afir_36_clarkson.pdf, s. 3. Odnosny fragment brzmi: „Oto przyjdą siedm lat żyzności wielkiej po wszyskiej ziemi Egiptskiej. Po których nastąpią drugie siedm lat takiego nieurodzaju, że się zapomni wszyska obfitość przeszła, głód bowiem popsuje wszyską ziemię” (Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu. Michał Glücksberg, Warszawa 1874, Rdz 41:29–30, s. 51).

¹⁶² J. Beran: Statistics for Long-Memory Processes. Chapman & Hall, New York et al. 1994, s. 42.

¹⁶³ B. Mandelbrot: Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. „Annals of Economic and Social Measurement”, Vol. 1, No. 3 July 1972, s. 266–267. Mandelbrot wprowadził jeszcze dwie typologie, a mianowicie Γ -zależność opartą na korelacji przeszłych i przyszłych średnich oraz R/S-zależność opartą na przeskalowanym zasięgu, jednak w niniejszej monografii nie będą one wykorzystywane (zob. ibid. oraz B. Mandelbrot: Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence. „Water Resources Research”, Vol. 5, No. 5 October 1969, s. 974–975).

jest skończona. Przedstawiona C-tetrachotomia jest o tyle wygodniejsza od klasyfikacji Berana, że akcentuje również specyfikę ułamkowego ruchu Browna dla $0 < H < \frac{1}{2}$.

Ułamkowy ruch Browna cechuje się **własnościami unifraktalnymi**¹⁶⁴ – jest on bowiem procesem samopodobnym z parametrem samopodobieństwa wynoszącym H. Z tego też względu obciążone błędzenie przypadkowe stało się jednym z dwóch fundamentalnych procesów wykonywanych w teorii rynku fraktalnego. Uogólniając bowiem model Samuelsona-Osborne’a na przypadek występowania zależności stóp zwrotu, można zapisać, że¹⁶⁵:

$$S_t = S_0 e^{ut + \sigma B_t^H}.$$

Przedstawiony model ma tę zasadniczą zaletę, że zdecydowanie lepiej odpowiada rzeczywistym fluktuacjom na rynkach finansowych, co zostało potwierdzone w wielu badaniach dotyczących różnych rynków: towarów, akcji, indeksów giełdowych czy nawet energii elektrycznej¹⁶⁶. Jednocześnie posiłkując się nim, dostarczono materiału dla porównań i analiz dotyczących m.in. hipotezy błędzenia losowego, dojrzałości czy efektywności rynków¹⁶⁷, w istotny sposób pogłębiając wiedzę o funkcjonowaniu rynków finansowych. Mimo to model cechuje się istotnym mankamentem: istnieje w nim możliwość dokonywania transakcji arbitrażowych¹⁶⁸. Z ekonomicznego punktu widzenia sytuacja taka jest niedopuszczalna, ponieważ osiąganie zysku bez ponoszenia ryzyka jest nieuzasadnione. Jest to istotna wada omawianego modelu, która jednak może zostać

¹⁶⁴ B. Mandelbrot: The inescapable need for fractal tools in finance. „Annals of Finance”, Vol. 1, No. 2 April 2005, s. 194.

¹⁶⁵ A. Weron, R. Weron: Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa 2009, s. 352.

¹⁶⁶ Zob. dla towarów np. G. Booth, F. Kaen, P. Koveos: Persistent Dependence in Gold Prices. „The Journal of Financial Research”, Vol. 5, No. 1 Spring 1982 czy R. Buła: Wpływ kryzysu finansowego na oszacowania wykładnika Hursta – analiza fraktalna cen wybranych metali. [W:] J. Grzywacz, S. Kowalski (red.): Gospodarka rynkowa w warunkach kryzysu. Wyd. PWSZ w Płocku, Płock 2012 oraz R. Buła: Fluktuacje cen towarów rolnych w świetle analizy fraktalnej. [W:] Gołębiewska B.: Wyzwania współczesnej gospodarki – aspekty teoretyczne i praktyczne. Wydawnictwo Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa 2015. Dla indeksów giełdowych i akcji zob. np. E. Peters: Fractal Structure in the Capital Markets. „Financial Analysts Journal”, Vol. 45, No. 4 July-August 1989; E. Peters: R/S Analysis Using Logarithmic Returns. „Financial Analysts Journal”, Vol. 48, No. 6 November-December 1992; S. Danilenko: Hurst Analysis of Baltic Sector Indices. [In:] L. Sakalauskas, C. Skiadas, E. Zavadskas (eds.): ASMDA-2009 Selected papers. Technika, Vilnius 2009; S. Danilenko: R/S financial market analysis. „Lietuvos matematikos rinkinys”, No. 48–49/2008; M. McKenzie: Non-Periodic Australian Stock Market Cycles: Evidence from Rescaled Range Analysis. „Economic Record”, Vol. 77, No. 239 December 2001; A. Razdan: Scaling in the Bombay stock exchange index. „Pramana – Journal of Physics”, Vol. 58, No. 3 March 2002; D. Nawrocki: R/S Analysis and Long Term Dependence in Stock Market Indices. „Managerial Finance”, Vol. 21, No. 7/1995; S. Da Silva, I. Gleria, R. Matsuhita, A. Figueirego: Hurst exponents, power laws and efficiency in the Brazilian foreign exchange market. „Economics Bulletin”, Vol. 7, No. 1/2007. Dla walut zob. m.in. R. Buła, K. Pera: Fractal features of Russian ruble exchange rates. [W:] Н.Д. Елещкий (red.): Проблемы и тенденции трансформации мировой экономики. Издательский центр ДГТУ, Ростов-на-Дону 2015. Dla cen energii elektrycznej zob. np. R. Weron, B. Przybyłowicz: Hurst analysis of electricity price dynamics. „Physica A”, Vol. 283/2000; R. Weron: Measuring long-range dependence in electricity prices. [In:] H. Takayasu: Empirical Science of Financial Fluctuations. Springer, Tokyo 2002.

¹⁶⁷ J. Matos, S. Gama, H. Ruskin, A. Sharkasi, M. Crane: Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets. „Physica A”, No. 387/2008; T. Matteo, T. Aste, M. Dacorogna: Scaling behaviors in differently developed markets. „Physica A”, Vol. 324/2003; D. Papla: Zastosowanie analizy R/S jako metody badania błędzenia losowego. „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu”, nr 813/1999; K. Zeug-Żebro: Uwagi o statystyce BDS i wykładniku Hursta w odniesieniu do danych giełdowych. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamickiego w Katowicach”, nr 50/2008; K. Zeug-Żebro: Metody odróżnienia deterministycznych szeregów czasowych od losowych. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamickiego w Katowicach”, nr 56/2010; M. Bęben, A. Orłowski: Correlations in financial time series: established versus emerging markets. „European Physical Journal B”, No. 20/2001.

¹⁶⁸ B. Mandelbrot: When Can Price be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models. „The Review of Economics and Statistics”, Vol. 53, No. 3 August 1971, s. 231.

wyeliminowana poprzez uwzględnienie faktu, że model ów (jak każdy) jest jedynie próbą przybliżenia rzeczywistości. Mechanizm arbitrażowy jest bowiem skuteczny w przypadku, gdy trajektorie procesu są ciągłe, a tak nie jest w rzeczywistości. Zatem wspomniany zarzut dotyczący modelu matematycznego należy podtrzymać, choć nie ma on odniesienia do rzeczywistości. Dlatego też wydaje się, że dotychczasowe badania empiryczne są dostatecznym argumentem za wykorzystaniem ułamkowego ruchu Browna do modelowania cen instrumentów finansowych.

Teoretycznego uzasadnienia ekonomicznego dla wykorzystania obciążonego błędzenia losowego dostarcza opisana uprzednio koncepcja Heinerja, Kaena i Rosenmana. Wśród argumentów przemawiających na korzyść tego modelu można także wymienić rozważania **Franka Taussiga**, który zauważył, że ze względu na możliwość występowania różnych oczekiwań inwestorów spadek cen nie musi wywoływać wzrostu popytu i zmniejszania się podaży, lecz w przewidywaniu dalszych spadków cen może prowadzić do spadku popytu i wzrostu podaży, a tym samym do dalszych, indukowanych obniżek ceny¹⁶⁹. W jego ujęciu wokół ceny równowagi istnieje pewien obszar, w którym ceny mogą wahać się, nie dążąc do niej. Odpowiedzialna za to zjawisko może być m.in. opisany mechanizm, powodujący powstanie serii jednokierunkowych zmian cen. Do podobnych konkluzji doszli także **Holbrook Working** oraz **Arnold Larson**¹⁷⁰. Na potencjalne występowanie pewnego „korytarza wahań” z ujemnymi korelacjami przy zbliżaniu się do barier „korytarza” wskazywał **Paul Cootner**¹⁷¹. Z kolei wyjaśnienie Petersa odnoszące się do kwestii związanych z płynnością wydaje się mieć większe zastosowanie w przypadku posługiwania się rozkładami α -stabilnymi. Wspomniane modele stanowią jednak pewne skrajności – w przypadku ułamkowego ruchu Browna zachowane jest założenie o gaussowskim charakterze stóp zwrotu przy odrzuceniu warunku mówiącego o ich niezależności. Z kolei w modelu Pareto-Lévy’ego-Mandelbrota stopy zwrotu są zmiennymi losowymi niezależnymi, lecz o nieskończonej wariancji. Wydaje się prawdopodobne, że rzeczywisty proces cen czy stóp zwrotu z instrumentów finansowych wykazuje cechy jednego i drugiego modelu¹⁷². Najprostszym procesem łączącym własności obydwu omawianych jest **ułamkowy ruch Lévy’ego**, określony jako¹⁷³:

$$L_H(t) - L_H(0) = \int_{-\infty}^0 \left[(t-s)^{H-1/\alpha} - (-s)^{H-1/\alpha} \right] dL_\alpha(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/\alpha} dL_\alpha(s),$$

gdzie $L_\alpha(t)$ jest symetrycznym procesem Lévy’ego o wykładniku α , $0 < H < 1$. Proces ten wykazuje zarówno nieskończoną wariancję, jak i zależność pomiędzy przyrostami¹⁷⁴, przy czym zależności są dodatnie dla $H > \frac{1}{\alpha}$, zaś ujemne dla $H < \frac{1}{\alpha}$. Co więcej, wykazuje on pożądane własności fraktalne.

¹⁶⁹ F. Taussig: Is Market Price Determinate? „The Quarterly Journal of Economics”, Vol. 35, No. 3 May 1921, s. 396–405.

¹⁷⁰ H. Working: A Theory of Anticipatory Prices. „The American Economic Review”, Vol. 48, No. 2 May 1958; A. Larson: Measurement of a Random Process in Futures Prices. [In:] P. Cootner (ed.): Op. cit.

¹⁷¹ P. Cootner: Stock Prices: Random vs. Systematic Changes. [In:] P. Cootner (ed.): Op. cit.

¹⁷² Mandelbrot zauważa, że „(...) dziś, ekonomia i finanse muszą być zdecydowanie odróżniane: ułamkowy ruch Browna może być prawdopodobnie stosowany w ekonomii, lecz nie w finansach” (przynajmniej nie w klasycznej postaci; B. Mandelbrot: Global (long-term) dependence in economics and finance. [In:] B. Mandelbrot: Gaussian Self-Affinity and Fractals. Springer, New York 2001, s. 603).

¹⁷³ S. Mercik, K. Weron, K. Burnecki, A. Weron: Enigma of Self-Similarity of Fractional Lévy Stable Motions. „Acta Physica Polonica B”, Vol. 34/2003, s. 3777. Czasami proces ten jest definiowany z wykorzystaniem czynnika standardyzującego (C. Franzke, T. Graves, N. Watkins, R. Gramacy, C. Hughes: Robustness of Estimators of Long-Range Dependence and Self-Similarity under non-Gaussianity. „Philosophical Transactions of the Royal Society A”, Vol. 370, No. 1962 March 2012, s. 1255).

¹⁷⁴ M. Taqqu, V. Teverovsky: On Estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series. [In:] R. Adler, R. Feldman, M. Taqqu (eds.): A Practical Guide to Heavy Tails. Birkhäuser, Basel 1998, s. 182.

Dotychczas omawiane modele można sklasyfikować ze względu na wartości współczynnika charakterystycznego oraz współczynnika samopodobieństwa.

Tab. 2. Klasyfikacja wybranych procesów fraktalnych

Współczynnik samopodobieństwa	Współczynnik charakterystyczny	
	$0 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
$H \neq \frac{1}{\alpha}$	<ul style="list-style-type: none"> • ułamkowy ruch Lévy'ego • ułamkowy szum Lévy'ego 	<ul style="list-style-type: none"> • ułamkowy ruch Browna • ułamkowy szum Browna
$H = \frac{1}{\alpha}$	<ul style="list-style-type: none"> • ruch Lévy'ego • szum Lévy'ego 	<ul style="list-style-type: none"> • ruch Browna • szum biały

Źródło: S. Mercik, K. Weron, K. Burnecki, A. Weron: Enigma of Self-Similarity of Fractional Lévy Stable Motions. „Acta Physica Polonica B”, Vol. 34/2003, s. 3778.

Mimo że obejmują one relatywnie szeroką klasę procesów, to jednak nie wyczerpują wszystkich możliwości, zwłaszcza jeżeli przyjąć rozróżnienie pomiędzy czasem handlowym a czasem rzeczywistym. Ich wspólną cechą pozostaje jednak fraktalny charakter. Jak już wspomniano, klasyczne miary ryzyka są adekwatne wówczas, gdy przyjmiemy za obowiązujący model Samuelsona-Osborne'a. W pozostałych przypadkach będą one dawać błędne wskazania (np. powszechnie wykorzystywane do przeliczania odchylenia standardowego dla różnych okresów $t_1, t_2 > 0$ prawo

$\sigma' = \sigma \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$ przestaje obowiązywać¹⁷⁵, jeżeli właściwym procesem stochastycznym do modelowa-

nia stóp zwrotu jest ułamkowy proces Browna z wykładnikiem $H \neq \frac{1}{2}$), bądź nie będą w ogóle istnieć (przypadek odchylenia standardowego dla niegaussowskich rozkładów α -stabilnych). Z tego też względu konieczne jest wypracowanie nowych miar uzupełniających mierniki klasyczne, tak by proces kwantyfikacji ryzyka inwestycyjnego nie prowadził do nietrafionych decyzji inwestycyjnych. Zdaniem autora warunki te spełnia wymiar fraktalny.

2.2. Problemy pomiaru ryzyka inwestycji na fraktalnym rynku finansowym

Problematyka niepewności i ryzyka inwestycyjnego została po raz pierwszy szerzej poruszona w literaturze naukowej w latach dwudziestych ubiegłego stulecia, w pracy **Franka Knighta** poświęconej uwarunkowaniom prowadzenia działalności gospodarczej w sytuacji braku pewności. Jego rozróżnienie pomiędzy **niepewnością niemierzalną** (*sensu stricte*) a **mierzalną** (tj. **ryzykiem**)¹⁷⁶

¹⁷⁵ K. Pera, R. Buła, D. Mitrenga: Modele inwestycyjne. C.H. Beck, Warszawa 2014, s. 56.

¹⁷⁶ „Praktyczna różnica pomiędzy tymi dwoma kategoriami – ryzykiem i niepewnością – jest taka, że w pierwszej sytuacji rozkład wyników w grupach przypadków jest znany (...), podczas gdy w odniesieniu do niepewności nie jest to prawdą (...)” (F. Knight: Op. cit., s. 233). Zob. także E. Peters: Simple and Complex Market Inefficiencies: Integrating Efficient Markets, Behavioral Finance, and Complexity. „The Journal of Behavioral Finance”, Vol. 4, No. 4/2003, s. 226–227.

stało się powszechne i obowiązujące, jednak dopiero prace **Bruno de Finetti**¹⁷⁷ i **Harry'ego Markowitza**¹⁷⁸ zapoczątkowały okres wzmożonych dociekań nad kwestią ryzyka inwestycyjnego.

W początkowym okresie rozwoju współczesnej teorii finansów rozpowszechnionym sposobem oceny atrakcyjności inwestycji finansowych były porównania oparte na wartości oczekiwanej stopy zwrotu i wariancji (bądź odchyleniu standardowym) stopy zwrotu zgodnie z koncepcją granicy efektywnej w sensie Markowitza, względnie innymi kryteriami opierającymi się na zbliżonym rozumieniu miar ryzykowności¹⁷⁹. Zwiększone zainteresowanie wspomnianą problematyką doprowadziło do wszechstronnego rozwoju teorii ryzyka inwestycji, w którego trakcie odkryto rozmaite niedostatki dotychczasowego podejścia. Wśród proponowanych rozwiązań do najciekawszych i najbardziej spójnych należy podejście zaprezentowane przez **Michaela Rothschilda** i **Josepha Stiglitz**.

Fundamentalnym zagadnieniem w rozważaniach Rothschilda i Stiglitz jest kwestia uznania jednej z dwóch zmiennych losowych za obciążoną większym ryzykiem. Rozważają oni cztery możliwości. W pierwszym podejściu zmienna losowa Y jest uznawana za bardziej ryzykowną od zmiennej losowej X , wówczas gdy zmienna losowa Y jest sumą zmiennej X oraz szumu, tj.:

$$Y = X + Z,$$

przy czym $E(Z|X) = 0$ (skąd wynika, że obydwie zmienne losowe cechują się tym samym poziomem nadziei matematycznej)¹⁸⁰.

Innym sposobem określenia, którą zmienną należy uznać za bardziej ryzykowną (przy założeniu, że mają one tę samą wartość oczekiwaną), jest zbadanie, czy dla dowolnej funkcji użyteczności inwestora cechującego się awersją do ryzyka (tj. o wklęsłej funkcji użyteczności) zachodzi zależność:

$$EU(X) \geq EU(Y).$$

W takiej sytuacji za obciążoną mniejszym ryzykiem należy uznać zmienną losową X . Jest to o tyle naturalne, że inwestor kierujący się zasadą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności w tej sytuacji wybrałby wypłatę czy stopę zwrotu opisaną właśnie za pomocą tej zmiennej.

Koncepcją związaną niejako z własnością rozkładów α -stabilnych jest kryterium dyskryminacyjne wykorzystujące pojęcie grubych ogonów. W tym ujęciu zmienna losowa powstająca poprzez takie przeniesienie części prawdopodobieństwa opisującej obszar rozkładu wokół średniej, że nadzieja matematyczna nie ulega zmianie, a następuje „pogrubienie” ogonów – jest bardziej ryzykowna niż pierwotnie rozważana zmienna losowa.

Czwartą metodą uporządkowania zmiennych losowych ze względu na niesiony przez nie poziom ryzyka jest wspomniane już posługiwanie się wariancją w sytuacji, gdy zmienne losowe cechują się tą samą wartością średnią. Rozważając teraz zbiór dystrybuant dla przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ i **relacje częściowego porządku** określone na tym zbiorze wprowadzone z wykorzystaniem przedstawionych uprzednio określeń, Rothschild i Stiglitz pokazali, że uporządkowanie dystrybuant nie zmieni się, niezależnie od tego, z której z pierwszych trzech definicji korzystać¹⁸¹. Są one

¹⁷⁷ L. Barone: Bruno de Finetti and the Case of the Critical Line's Last Segment. „Insurance: Mathematics and Economics”, Vol. 42, No. 1 February 2008.

¹⁷⁸ H. Markowitz: Portfolio Selection. „The Journal of Finance”, Vol. 7, No. 1 March 1952.

¹⁷⁹ Zob. np. A. Roy: Safety First and the Holding of Assets. „Econometrica”, Vol. 20, No. 3 July 1952.

¹⁸⁰ Autorzy początkowo przyjmowali, że zmienne X i Z są jedynie nieskorelowane (M. Rothschild, J. Stiglitz: Increasing Risk: I. A Definition. „Journal of Economic Theory”, Vol. 2, No. 3 September 1970, s. 225, przyp. 3). Jeszcze silniejszy jest warunek głoszący, że X i Z są niezależne (a wartość oczekiwana Z wynosi 0).

¹⁸¹ Jak wynika z rozważań Jamesa Quirka i Rubina Saposnika, warunki te są ekwiwalentne dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (zob. J. Quirk, R. Saposnik: Admissibility and Measurable Utility Functions. „The Review of Economic Studies”, Vol. 29, No. 2 February 1962, s. 141 oraz J. Hadar, W. Russell: Rules for Ordering Uncertain Prospects. „The American Economic Review”, Vol. 59, No. 1/1969).

zatem ekwiwalentne (w sensie rozważanej relacji częściowego porządku). Z kolei relacja porządku wprowadzona z wykorzystaniem pojęcia wariancji ma tę zaletę, że pozwala jednoznacznie stwierdzić dla dowolnej pary zmiennych losowych, która z nich jest bardziej ryzykowna (w rozumieniu naszego kryterium). Pozostałe określenia są jej pozbawione, lecz w opinii twórców fakt, że relacja związana z wariancją jest spójna, może prowadzić do fałszywych wskazań. Ze względu na omawiane własności rozkładów α -stabilnych propozycja Rothschilda i Stiglitz'a wydaje się użyteczna¹⁸², jednak dalsza analiza pozwala podać w wątpliwość jej przydatność. Zasadniczą wadą wspomnianych uporządkowań jest bowiem fakt, że odnoszą się one do pojedynczych zmiennych losowych, a nie procesów stochastycznych, i miałyby zastosowanie, gdyby stopy zwrotu w kolejnych okresach były niezależne i o identycznym rozkładzie. Jednak w sytuacji występowania rozmaitych zależności w czasie pomiędzy stopami zwrotu ów sposób oceny ryzykowności staje się mało użyteczny. Konieczne jest zatem poszukiwanie się miarą, która nie odnosi się do poziomu ryzyka w danym momencie, lecz która pokazuje jego fluktuacje w czasie. Takim miernikiem jest w opinii autora wymiar fraktalny.

2.2.1. Wymiar fraktalny jako proponowana miara ryzyka inwestycji finansowych

W celu uzasadnienia, że wymiar fraktalny może, a dla poprawności analizy i formułowanych wniosków wręcz niezbędne jest by był traktowany jako co najmniej uzupełniająca miara ryzyka, należy odwołać się do przedstawionej uprzednio klasyfikacji procesów stochastycznych. W dalszym ciągu będziemy rozważać dla uproszczenia wywodów procesy o samopodobnych i stacjonarnych przyrostach (*H-ssi-si*) ze współczynnikiem samopodobieństwa równym H . Współczynnik ten bywa nazywany wykładnikiem Hursta, pokazując relację pomiędzy współczynnikiem skalowania na osi czasu a współczynnikiem skalowania na osi wartości zmiennej niezależnej. **Wykładnik Hursta** jest ściśle związany z wymiarem pudełkowym wykresu danej funkcji czy trajektorii procesu stochastycznego, co można wykazać, posiłkując się metodą pudełkową obliczania wymiaru fraktalnego¹⁸³.

W pierwszej kolejności pokrywamy wykres funkcji siatką kwadratową o boku ε i zliczamy kwadraty mające co najmniej jeden punkt wspólny z wykresem ($N_\varepsilon(X)$). Następnie rozważamy siatkę kwadratową o boku k -krotnie mniejszym¹⁸⁴. Jako że $X(t_0 + \frac{\varepsilon}{k}) - X(t_0) \stackrel{d}{=} k^{-H} [X(t_0 + \varepsilon) - X(t_0)]$ (z własności samopodobieństwa i stacjonarności przyrostów procesu), a zatem przeciętny rozstęp dla przyrostu $X(t_0 + \frac{\varepsilon}{k}) - X(t_0)$ jest równy przeciętnemu rozstępowi dla przyrostu $X(t_0 + \varepsilon) - X(t_0)$ podzielonemu przez k^H . Stąd też liczba kwadratów potrzebnych do pokrycia wykresu trajektorii w przedziale $\langle t_0, t_0 + \frac{\varepsilon}{k} \rangle$ wyniesie $\frac{N_\varepsilon(X_{(t_0, t_0 + \varepsilon)})}{k^H} : \frac{1}{k}$ (bowiem także bok kwadratu ulega redukcji k -krotnej), tj. wyniesie teraz $k^{1-H} N_\varepsilon(X_{(t_0, t_0 + \varepsilon)})$. Ponieważ przedział $\langle t_0, t_0 + \varepsilon \rangle$ składa się

¹⁸² Rothschild i Stiglitz próbowali ją stosować także do rozwiązania problemu doboru akcji do portfela czy określenia optymalnych rozmiarów produkcji przedsiębiorstwa (zob. M. Rothschild, J. Stiglitz: *Increasing Risk: II. Its Economic Consequences*, „Journal of Economic Theory”, Vol. 3, No. 1 March 1971).

¹⁸³ R. Voss: *Random Fractal Forgeries*. [In:] R. Earnshaw: *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*. Springer, Berlin 1991, s. 816–817.

¹⁸⁴ W literaturze najczęściej rozważany jest przypadek, gdy $k = 2$ (zob. A. Mastalerz-Kodzisz: *Modelowanie...*, op. cit., s. 47).

z k nienakładających się przedziałów o długości $\frac{\varepsilon}{k}$, zatem liczba kwadratów potrzebnych do pokrycia wykresu trajektorii w przedziale $\langle t_0, t_0 + \varepsilon \rangle$ wzrośnie do $k \cdot k^{1-H} N_\varepsilon(X_{(t_0, t_0 + \varepsilon)}) = k^{2-H} N_\varepsilon(X_{(t_0, t_0 + \varepsilon)})$. Zatem liczba kwadratów niezbędnych do pokrycia całej trajektorii wzrośnie do $k^{2-H} N_\varepsilon(X)$, tj. k^{2-H} -krotnie. Po n podziałach liczba kwadratów wyniesie $k^{n(2-H)} N_\varepsilon(X)$ przy boku siatki kwadratowej równym $\frac{\varepsilon}{k^n}$. Zatem:

$$\dim_B(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k^{n(2-H)} N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{\varepsilon}{k^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2-H) \ln k + \ln N_\varepsilon(X)}{n \ln k - \ln \varepsilon} = 2 - H.$$

Wymiar pudełkowy pokazuje zatem, jakie jest tempo zmian funkcji czy trajektorii procesu stochastycznego. Jest to także zasadniczy argument przemawiający za wykorzystaniem w analizach – spośród omawianych w poprzednim rozdziale wymiarów – właśnie wymiaru pudełkowego. Ponadto, jak zostanie pokazane dalej, wymiar pudełkowy ma **czytelną interpretację ekonomiczną**, dlatego też w niniejszej pracy w analizach empirycznych postanowiono poślikować się przede wszystkim konstrukcją Minkowskiego-Bouliganda.

Powyższe spostrzeżenie jest kluczowe z punktu widzenia **zastosowania wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka inwestycyjnego**. Jak bowiem zauważono¹⁸⁵, odchylenie standardowe i inne klasyczne miary ryzyka są miernikami, które można określić jako statyczne. Ich znajomość dla okresów o zadanej długości nie pozwala nic powiedzieć o kształtowaniu się tych wielkości w przypadku okresów o odmiennych długościach. Dla określenia takowych niezbędne jest poczynienie pewnych arbitralnych założeń – czy raczej uznanie za prawdziwą określoną hipotezę dotyczącą odnośnych relacji intertemporalnych. W sytuacji posługiwania się hipotezą o jednolitym kształtowaniu się wykładnika samopodobieństwa w populacji instrumentów finansowych na poziomie $\frac{1}{2}$ dalsze analizy wymiaru fraktalnego stają się zbędne. Jednak zdaniem autora hipoteza owa nie jest prawdziwa (procedura falsyfikacji zostanie opisana w dalszej części pracy). Co więcej, nie wydaje się, by prawdziwa była także hipoteza słabsza, choć dalej relatywnie restrykcyjna, głosząca, że poziom wykładnika samopodobieństwa jest jednolity w populacji instrumentów finansowych (choć niekoniecznie musi on być równy $\frac{1}{2}$). W rzeczywistości bowiem (co autor postara się pokazać) różne instrumenty finansowe cechują się odmiennym poziomem wykładnika samopodobieństwa, co sprawia, że kwestia oceny ryzyka inwestycyjnego z nimi związanego staje się zdecydowanie mniej klarowna niż w modelach tradycyjnych. Wydaje się jednak, że owa hipoteza jest zdecydowanie bliższa rzeczywistym fluktuacjom cen niż eleganckie i relatywnie proste, lecz nie do końca oddające stopień skomplikowania mechanizmów rynku finansowego założenia.

Należy jednak podkreślić, że autor niniejszej pracy nie proponuje odrzucenia tradycyjnych miar ryzyka na korzyść wymiaru fraktalnego. Wymiar fraktalny oddaje bowiem charakter fluktuacji miar tradycyjnych w czasie, nie wskazując jednak bezpośrednio na ich bezwzględny poziom. Nie jest albowiem prawdziwa hipoteza, że „Aby zunifikować obszar działania obu mierników, można wyznaczyć wymiar fraktalny zlogarytmowanych kursów”¹⁸⁶ – które to działanie jest przeciwstawiane przez Autorkę szacowaniu wymiaru fraktalnego szeregu kursów i odchylenia standardowego logarytmicznych stóp zwrotu. Jak zostanie dowiedzione, wymiar fraktalny determinuje poziom ryzykowności inwestycji (w sytuacji gdy różne instrumenty finansowe cechują się jego odmiennym poziomem) wyłącznie w przypadku, gdy rozpatrywany horyzont inwestycyjny jest nieskończenie

¹⁸⁵ M. Zwolankowska: *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2001, s. 113.

¹⁸⁶ *Ibid.*, s. 114.

krótki lub nieskończenie długi. Rezultaty analiz uzyskane dla wskazanych warunków brzegowych, choć mają istotne znaczenie teoretyczne, to jednak ze względu na fakt, że horyzonty inwestycyjne mają nie tylko skończoną, lecz także pewną minimalną długość, są mniejszej doniosłości praktycznej. Wówczas znaczenia nabierają dodatkowe miary uwzględniające bezwzględny – a także statyczny – poziom ryzyka, do których należą wspomniane miary tradycyjne.

W piśmiennictwie relatywnie rzadko podnoszony jest problem zależności pomiędzy poziomem ryzyka inwestycyjnego a poziomem wymiaru fraktalnego. W publikacjach, w których zwrócono na niego uwagę (choć zwykle bardzo lakonicznie), zgodnie stwierdza się, że relacja owa jest jednokierunkowa: wzrost wymiaru fraktalnego ma świadczyć o wzroście poziomu ryzyka inwestycyjnego, zaś jego spadek – o zmniejszaniu się ryzykowności inwestycji¹⁸⁷. Uzasadnienie – które głębiej przedstawiła w swej niezmiernie istotnej pracy jedynie Małgorzata Zwołankowska – opiera się na wykorzystaniu pojęcia rozstępu skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu (bądź kursów) dla danego szeregu czasowego.

W pierwszej kolejności należy rozważyć daną funkcję $f(x)$ (dla uproszczenia analizowaną na przedziale $\langle 0,1 \rangle$). Zamiast badać pokrycie z wykorzystaniem siatki kwadratowej lub za pomocą kół, rozpatruje się ε -oscylacje $v(x, \varepsilon)$:

$$v(x, \varepsilon) = \sup_{x' \in R_\varepsilon(x)} f(x') - \inf_{x' \in R_\varepsilon(x)} f(x'),$$

gdzie $R_\varepsilon(x) = \{s \in \langle 0,1 \rangle : |x-s| < \varepsilon\}$. Wówczas ε -wariacja funkcji jest dana jako:

$$V(\varepsilon, f) = \int_0^1 v(x, \varepsilon) dx.$$

Dubuc et al. pokazali, że wymiar fraktalny wykresu funkcji można szacować z wykorzystaniem ε -wariacji (**metoda wariacyjna**):

$$\dim_B \left(\{(x, y) : x \in \langle 0,1 \rangle, y = f(x)\} \right) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln V(\varepsilon, f)}{\ln \varepsilon}.$$

Przedstawiona równość stała się punktem wyjściowym rozważań Zwołankowskiej, która z kolei dowodziła, że metodę wariacyjną można zastąpić efektywniejszą **metodą segmentowo-wariacyjną**, nadającą jednocześnie czytelną interpretację ekonomiczną kalkulowanym wielkościami¹⁸⁸. W jej ujęciu ε -oscylacje i ε -wariacje są eliminowane poprzez podział wykresu funkcji na segmenty (dla uproszczenia zakładamy, że zmienna niezależna została przeskalowana tak, by badany wykres był określony na przedziale $\langle 0,1 \rangle$)¹⁸⁹. Wówczas dla danego $\Delta x = \varepsilon$ obliczamy rozstęp w każdym z segmentów, tj. dla przedziałów postaci $\langle (k-1)\varepsilon, k\varepsilon \rangle$, $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, a także w przedziale ostatnim o długości $1 - \varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$:

$$h_k = \max_{x \in \langle (k-1)\varepsilon, k\varepsilon \rangle} f(x) - \min_{x \in \langle (k-1)\varepsilon, k\varepsilon \rangle} f(x), \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$$

¹⁸⁷ Zob. M. Zwołankowska: Wymiar fraktalny jako miara zmienności stopy zwrotu. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 306/2000, s. 268; T. Waściński, G. Przekota: Wybrane problemy oceny ryzyka zmian cen akcji za pomocą miar klasycznych i nieklasycznych. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach”, nr 95/2012, s. 81–82.

¹⁸⁸ Za: M. Zwołankowska: Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja szacowania wymiaru fraktalnego. „Przegląd Statystyczny”, z. 1–2/2000.

¹⁸⁹ Dowód, że postępowanie to nie wpływa poziom rzeczywistego i szacowanego wymiaru fraktalnego, zostanie przedstawiony w następnym rozdziale (zob. s. 109).

oraz

$$h_{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} = \max_{x \in (\varepsilon[\frac{1}{\varepsilon}], 1)} f(x) - \min_{x \in (\varepsilon[\frac{1}{\varepsilon}], 1)} f(x).$$

Oznaczając wówczas przez $\Gamma_\varepsilon(X)$ pole wszystkich prostokątów ograniczonych w każdym segmencie wartością minimalną i maksymalną funkcji:

$$\Gamma_\varepsilon(X) = \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\varepsilon}]} h_k \varepsilon + h_{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} (1 - \varepsilon[\frac{1}{\varepsilon}])$$

wymiar fraktalny można obliczać jako:

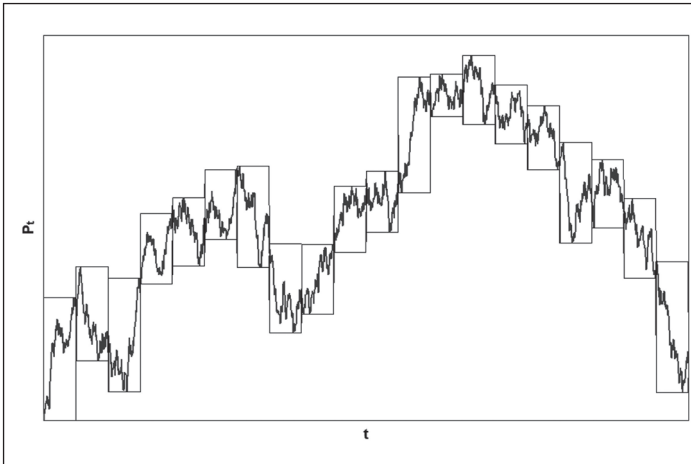
$$\dim_B(X) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X)}{\ln \varepsilon}.$$

Z powyższej zależności wnioskujemy, że dla $\varepsilon \rightarrow 0$ wielkości $\Gamma_\varepsilon(X)$ oraz $\varepsilon^{2 - \dim_B(X)}$ są tego samego rzędu, tj.:

$$\Gamma_\varepsilon(X) \sim \varepsilon^{2 - \dim_B(X)}.$$

Ponieważ $\Gamma_\varepsilon(X) = \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\varepsilon}]} h_k \varepsilon + h_{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} (1 - \varepsilon[\frac{1}{\varepsilon}])$, zatem możemy $\Gamma_\varepsilon(X)$ traktować jako średnią wartość rozstępu danej funkcji dla segmentów o długości ε : $\Gamma_\varepsilon(X) = \bar{h}_\varepsilon$. Stąd wynika, że $\bar{h}_\varepsilon \sim \varepsilon^{2 - \dim_B(X)}$. A zatem (oznaczając długość segmentu przez T oraz odchodząc od uproszczonej analizy dla $x \in (0, 1)$)¹⁹⁰:

$$\frac{\bar{h}_{T_2}}{\bar{h}_{T_1}} \sim \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{2 - \dim_B(X)}.$$



Rys. 30. Idea metody segmentowo-wariacyjnej szacowania wymiaru fraktalnego dla cen akcji

Źródło: Opracowanie własne.

¹⁹⁰ Uogólniona postać zależności przedstawionej przez Zwolankowską w: M. Zwolankowska: Wykorzystanie wymiaru fraktalnego w ocenie ryzyka inwestycji giełdowych. [W:] T. Trzaskalik (red.): Modelowanie preferencji a ryzyko '99. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 1999.

Na podstawie wzoru $\dim_B(X) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X)}{\ln \varepsilon} = 2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ i jego rozwinięcia dla metody segmentowo-wariacyjnej $\dim_B(X) = 2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{h}_\varepsilon}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ formułowany jest interesujący wniosek, a mianowicie, że wzrost przeciętnego rozstępu \bar{h}_ε skutkuje wzrostem wymiaru fraktalnego¹⁹¹. Na tej podstawie prezentowana jest konkluzja, że szeregi czasowe cechujące się wyższym wymiarem fraktalnym reprezentują instrumenty o wyższym poziomie ryzyka: „**Jeśli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność i przyjmiemy, że większa zmienność oznacza większe ryzyko, to niższe wartości wymiaru fraktalnego będą oznaczać niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko**”¹⁹², bądź „Im wymiar szeregu jest bliższy jedynki, tym wykres szeregu jest bardziej gładki, tym ryzyko zmian wartości szeregu jest mniejsze”¹⁹³. **Takie podejście, bez uwzględnienia długości horyzontu inwestycyjnego, prowadzi do absurdalnych wniosków.** Przykładowo, Witold Orzeszko posiłkując się metodą segmentowo-wariacyjną (z opracowaną przez Zwolankowską procedurą doboru długości segmentów), uzyskał specyficzne wyniki dla fluktuacji wybranych indeksów giełdowych w okresie 02.01.2001-03.04.2009 (dla poziomów indeksu).

Tab. 3. Oszacowany wymiar fraktalny poziomów wybranych indeksów giełdowych w okresie 02.01.2001–03.04.2009 wg W. Orzeszki

Indeks	Wymiar fraktalny
sWIG80	1,2840
mWIG40	1,3090
WIG	1,3580
WIG20	1,4360

Źródło: W. Orzeszko: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397/2010, s. 66.

Zgodnie z logiką powyższego rozumowania Autor stwierdza, że za najbardziej ryzykowne należy uznać inwestycje w sektor największych i najbardziej płynnych spółek, tj. WIG20, zaś najmniej ryzykowne było lokowanie środków w akcjach spółek małych i średnich. Wnioski te są podobne, jeżeli posiłkować się także odchyleniem standardowym.

Powyższe konkluzje budzą jednak poważne wątpliwości. Wnioskowanie dedukcyjne nakazywałoby uznać akcje spółek małych i średnich, będące przedmiotem obrotu na stosunkowo mało płynnym rynku, w większym stopniu narażone na trudności natury ekonomicznej za bardziej ryzykowne niż akcje spółek dużych. Z tego też względu autor postanowił dogłębniej zbadać omawianą relację i jej uzasadnienie teoretyczne.

¹⁹¹ Należy pamiętać, że ponieważ $\varepsilon \rightarrow 0$, zatem $\ln \varepsilon < 0$ oraz $\ln \bar{h}_\varepsilon < 0$, zaś $\ln \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

¹⁹² G. Przekota: Szacowanie ryzyka zmian cen akcji metodą podziału pola. „Problemy Zarządzania”, Vol. 10, No. 4/2012, s. 186–187.

¹⁹³ A. Mastalerz-Kodzis: Modelowanie..., op. cit., s. 48.

2.2.2. Autorskie podejście do oceny ryzyka inwestycji finansowych w oparciu o wymiar fraktalny

W pierwszej kolejności, zamiast odwoływać się do miar statycznych (odchylenia standardowego), które ukazują poziom ryzyka jedynie dla pewnego horyzontu inwestycyjnego, postanowiono

z badać związek $\frac{\bar{h}_{T_2}}{\bar{h}_{T_1}} \sim \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2-\dim_B(X)}$. Ustalając za Zwolankowską poziom T_1 jako jednostkowy,

możemy zapisać, że:

$$\frac{\bar{h}_T}{\bar{h}_1} \sim T^{2-\dim_B(X)}.$$

Jako że \bar{h}_1 jest dla danego instrumentu finansowego stałe, zatem z powyższego wzoru widać, że przyrost ryzyka wraz z wydłużaniem się długości segmentu jest tym szybszy, im wymiar fraktalny mniejszy. Jednocześnie skracanie się długości horyzontu inwestycyjnego powoduje wówczas relatywnie gwałtowny spadek przeciętnego rozstępu. Jeżeli zapisać powyższą relację dla względnych zmian długości horyzontu inwestycyjnego, otrzymamy:

$$\frac{\bar{h}_{T(1+p)}}{\bar{h}_T} \sim (1+p)^{2-\dim_B(X)},$$

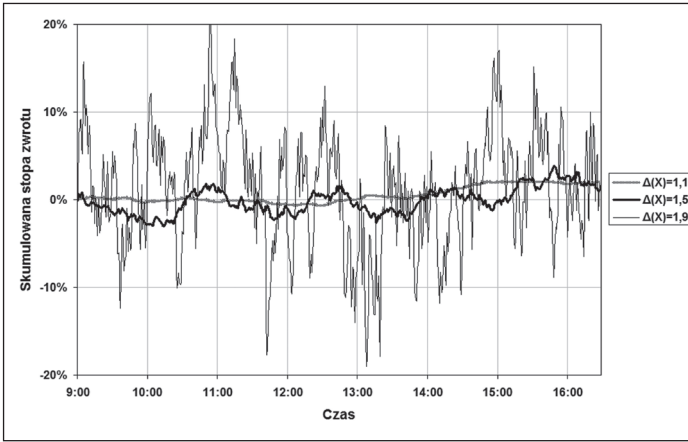
co w przybliżeniu daje tempo zmian przeciętnego rozstępu na poziomie $[2 - \dim_B(X)]p$, które jest tym większe, im wymiar fraktalny mniejszy. Jeżeli zatem odwołać się do aspektu dynamicznego, to uznając, że mniej ryzykowne są instrumenty o stabilniejszym poziomie przeciętnego rozstępu skumulowanych stóp zwrotu, omawiana relacja przedstawia się odwrotnie, niż poprzednio przedstawiono. Istotne jest zatem, czy badamy poziom przeciętnego rozstępu, czy też tempo jego zmian.

Przedstawiona analiza odnosi się do fluktuacji poziomu ryzyka dla poszczególnych instrumentów wraz ze zmianami długości horyzontu inwestycyjnego, nie dostarczając jednak bezpośrednich przesłanek, na których można by oprzeć proces porównywania poziomu ryzyka pomiędzy nimi. Załóżmy zatem, że **naszym celem jest określenie, która z dwóch akcji: A czy B jest bardziej ryzykowna**, wykorzystując uprzednio omówione instrumentarium. Przyjmujemy, że wymiar fraktalny akcji A¹⁹⁴ $\dim_B(X_A) = \Delta_A$ jest większy niż wymiar fraktalny akcji B $\dim_B(X_B) = \Delta_B$: $\Delta_A > \Delta_B$. W myśl sformułowań zaczerpniętych z literatury przedmiotu za bardziej ryzykowną należałoby uznać akcję A, jako cechującą się wyższym wymiarem fraktalnym. Jak zostanie wykazane, nie jest to jednak odpowiedź poprawna.

W celu sformułowania stosownej hipotezy odnośnie do relacji pomiędzy szeregami czasowymi o danym wymiarze fraktalnym celowe jest zbadanie fluktuacji szeregów o znanym wymiarze. W tym celu wykorzystano przykładowe trajektorie ułamkowego ruchu Browna dla różnych wartości wymiaru pudełkowego: 1,1; 1,5 oraz 1,9 przy założeniu, że odchylenie standardowe dla dziennej stopy zwrotu jest jednakowe. Następnie dokonano symulacji i wygenerowano szeregi o 500 obserwacjach pokazujących kształtowanie się skumulowanej logarymicznej stopy zwrotu w ciągu jednego dnia oraz ośmiu kolejnych kwartałów. (Zob. rys. 31 i 32, s. 75)

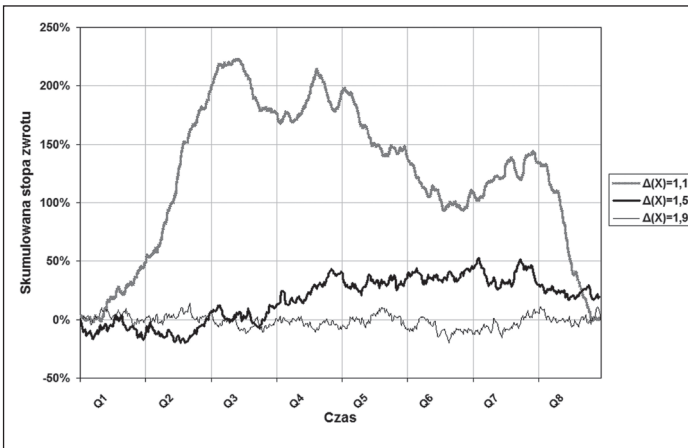
Analiza przedstawionych wykresów skłania do przyjęcia hipotezy głoszącej, że poziom zmienności (a zatem w naszym ujęciu także ryzyka) związanego z instrumentem finansowym jest powiązany z poziomem wymiaru fraktalnego szeregu czasowego skumulowanych logarymicznych stóp zwrotu. Uszczegóławiając, można stwierdzić, że postać tej relacji jest uzależniona od długości rozpatrywanego

¹⁹⁴ Czy też właściwiej: wykresu skumulowanych logarymicznych stóp zwrotu z akcji A.



Rys. 31. Przykładowe skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji dla różnych wartości wymiaru fraktalnego w ciągu jednego dnia handlowego

Źródło: R. Buła: Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 155/2013, s. 454.



Rys. 32. Przykładowe skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji dla różnych wartości wymiaru fraktalnego w ciągu ośmiu kwartałów

Źródło: R. Buła: Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 155/2013, s. 456.

horyzontu inwestycyjnego. Wydaje się przy tym, że dla okresów długich szeregi czasowe o większym wymiarze fraktalnym cechują się niższym poziomem ryzyka, zaś dla okresów krótkich – wyższym.

Punktem oparcia dla pokazania¹⁹⁵, że sformułowana hipoteza badawcza jest prawdziwa, będzie za-

leżność $\frac{\bar{h}_{T_2}^A}{\bar{h}_{T_1}^A} \sim \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2-\Delta_A}$. Dalej przyjmijmy, że w pewnym okresie¹⁹⁶ o długości T_2 przeciętne rozstępy

¹⁹⁵ Wnioskowanie przedstawione za: R. Buła: Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 155/2013, s. 453–457.

¹⁹⁶ Gdy tylko $\Delta_A \neq \Delta_B$, to okres taki istnieje. Mamy bowiem $\bar{h}_{T_2}^A \approx c_A T_2^{2-\Delta_A}$ oraz $\bar{h}_{T_2}^B \approx c_B T_2^{2-\Delta_B}$, $c_A, c_B \in \mathbb{R}_+$. Wówczas $\bar{h}_{T_2}^A = \bar{h}_{T_2}^B$ gdy $c_A T_2^{2-\Delta_A} = c_B T_2^{2-\Delta_B}$, skąd $T_2 = \left(\frac{c_A}{c_B}\right)^{\frac{1}{\Delta_A - \Delta_B}}$. Z kolei w sytuacji gdy $\Delta_A = \Delta_B$, można wyróżnić trzy przypadki:

- $c_A = c_B$ – wówczas $\bar{h}_{T_k}^A = \bar{h}_{T_k}^B$ dla dowolnego $T_k, T_k > 0$,
- $c_A > c_B$ – wówczas $\bar{h}_{T_k}^A > \bar{h}_{T_k}^B$ dla dowolnego $T_k, T_k > 0$,
- $c_A < c_B$ – wówczas $\bar{h}_{T_k}^A < \bar{h}_{T_k}^B$ dla dowolnego $T_k, T_k > 0$,

przy czym dwa ostatnie są nieuzasadnione z ekonomicznego punktu widzenia.

skumulowanej logarytmicznej stopy zwrotu dla akcji spółki A ($\bar{h}_{T_2}^A$) oraz akcji spółki B ($\bar{h}_{T_2}^B$) wynoszą $\bar{h}_{T_2}^A = \bar{h}_{T_2}^B = \bar{h}_{T_2}$. Wtedy zachodzi $\bar{h}_{T_1}^A \sim \bar{h}_{T_2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2-\Delta_A}$ oraz $\bar{h}_{T_1}^B \sim \bar{h}_{T_2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{2-\Delta_B}$. Wynika stąd, że $\frac{\bar{h}_{T_1}^A}{\bar{h}_{T_1}^B} \sim \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\Delta_A-\Delta_B}$. Jako że T_2 jest stałe, zatem gdy $T_1 \rightarrow 0$, to $\frac{\bar{h}_{T_1}^A}{\bar{h}_{T_1}^B} \rightarrow \infty$, bo $\Delta_A - \Delta_B > 0$.

Dla analizowanego przejścia granicznego rząd nieskończenie małej $\bar{h}_{T_1}^A$ jest niższy niż rząd $\bar{h}_{T_1}^B$ – jako że zanika ona zdecydowanie wolniej, zatem **dla skracającego się horyzontu inwestycyjnego ($T_1 \rightarrow 0$) poziom ryzyka związanego z inwestowaniem w akcje spółki A jest zdecydowanie większy niż poziom ryzyka wiążącego się z lokowaniem kapitału w akcjach spółki B**. W tej sytuacji należy stwierdzić, że dla nieskończenie krótkich horyzontów inwestycyjnych bardziej ryzykowne jest inwestowanie w akcje o wyższym wymiarze fraktalnym. Powyższa konkluzja jest zatem zgodna z dotychczas przyjętymi poglądami na ową relację. Kluczowym problemem wiążącym się z możliwością wykorzystania jej w ocenie ryzyka inwestycji finansowych jest fakt, że poza tym granicznym, szczególnym przypadkiem nie pozostaje ona słuszna. Trzeba ponadto pamiętać, że prócz inwestorów otwierających i zamykających pozycje w tak krótkich okresach czy wykorzystujących dane wysokiej częstotliwości istnieje także pokaźna grupa podmiotów inwestujących z myślą o utrzymywaniu otwartych pozycji w dłuższym okresie. Z ich punktu widzenia otrzymane wyniki są bezwartościowe, ponieważ w sytuacji, kiedy rezultaty uzyskane dla okresów krótkich nie powielają się w okresie długim, nie umożliwiają one dokonania oceny poziomu ryzyka dla interesującego ich horyzontu inwestycyjnego.

Proste odniesienie uzyskanych wyników całkowicie zniekształcałoby relację pomiędzy ryzykownością akcji, o czym świadczy następujące rozumowanie. Zakładając jak poprzednio, że w pewnym okresie T_2 przeciętny rozstęp skumulowanej logarytmicznej stopy zwrotu dla akcji spółki A oraz akcji spółki B jest równy $\bar{h}_{T_2}^A = \bar{h}_{T_2}^B = \bar{h}_{T_2}$, dostajemy analogicznie $\bar{h}_{T_3}^A \sim \bar{h}_{T_2} \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{2-\Delta_A}$ oraz $\bar{h}_{T_3}^B \sim \bar{h}_{T_2} \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{2-\Delta_B}$, a stąd wynika $\frac{\bar{h}_{T_3}^A}{\bar{h}_{T_3}^B} \sim \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\Delta_A-\Delta_B}$. Dla stałego T_2 oraz $T_3 \rightarrow \infty$ zachodzi $\frac{\bar{h}_{T_3}^A}{\bar{h}_{T_3}^B} \rightarrow 0$. W tym przypadku widać, że **akcje spółki A przy wydłużającym się (*de facto* nieskoń-**

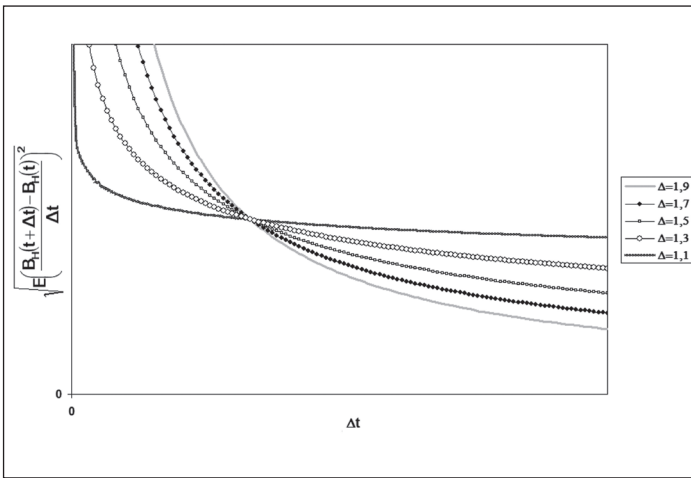
czenie długim) horyzoncie inwestycyjnym są zdecydowanie mniej ryzykowne niż akcje spółki B, bo średni rozstęp skumulowanej logarytmicznej stopy zwrotu wzrasta w przypadku spółki B

na tyle szybko, że $\frac{\bar{h}_{T_3}^B}{\bar{h}_{T_3}^A} \rightarrow \infty$.

Przeprowadzona analiza pokazuje, że uogólnianie dotychczasowego poglądu na relację pomiędzy poziomem ryzyka a wymiarem fraktalnym na wszystkie długości horyzontów inwestycyjnych jest niepoprawne i mylące. Dlatego też dopiero w świetle uzyskanych rezultatów teoretycznych można właściwie zinterpretować przytaczane już wyniki badań Orzeszki¹⁹⁷.

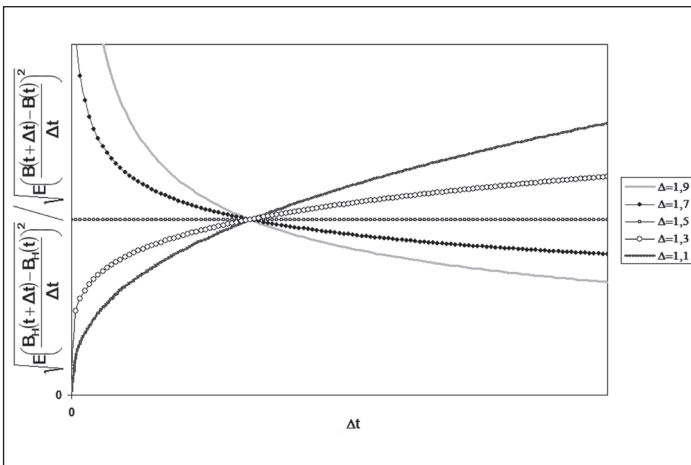
¹⁹⁷ Dla relatywnie krótkich okresów analogiczne wyniki zostały przedstawione m.in. w: S. Majewski: Badanie „ryzyka w punkcie” za pomocą wykładnika Hursta na przykładzie kursu akcji Żywca S.A. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, Nr 233/1998.

Dla nieskończenie długiego horyzontu inwestycyjnego (a w praktyce dla relatywnie długich horyzontów) za najbardziej ryzykowne trzeba uznać inwestycje w akcje spółek małych (wchodzących w skład indeksu sWIG80), następnie w akcje spółek średnich (tworzących indeks mWIG40), a za najmniej ryzykowne można traktować akcje spółek dużych (służących wyliczaniu indeksu WIG20). Wynik ten jest zgodny z opiniami rozpowszechnionymi w nauce finansów¹⁹⁸. Dla okresów relatywnie krótkich można jednak oczekiwać odmiennego wyniku. Rynek akcji spółek dużych jest na ogół rynkiem najbardziej płynnym i na nim koncentruje się uwaga inwestorów oraz pokaźny wolumen transakcji. Z kolei rynki akcji spółek małych i średnich są mniej płynne, co sprawia, że w krótkim okresie trudniej jest znaleźć partnera do zawarcia transakcji i ich liczba jest ograniczona. Wydaje się zatem, że w okresach krótkich większą zmiennością powinien cechować się rynek akcji spółek dużych. Na analogiczną relację wskazuje w danym przypadku oszacowany wymiar fraktalny.



Rys. 33. Odchylenie standardowe przeciętnego przyrostu ułamkowego ruchu Browna

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 34. Stosunek odchylenia standardowego przeciętnego przyrostu ułamkowego ruchu Browna do odchylenia standardowego przeciętnego przyrostu standardowego ruchu Browna

Źródło: Opracowanie własne.

¹⁹⁸ Zob. np. E. Elton, M. Gruber: Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych. WIG-Press, Warszawa 1998, s. 24–27.

Poprawność opisywanej zależności można także uzasadnić, odwołując się do podstawowych własności omawianych procesów stochastycznych (w szczególności ułamkowego ruchu Browna). W ogólnym przypadku mamy bowiem:

$$\text{cov}[B_H(t) - B_H(s), B_H(s) - B_H(r)] = \frac{1}{2} \left[(t-r)^{2H} - (t-s)^{2H} - (s-r)^{2H} \right],$$

a dla okresów jednostkowych (tj. gdy $t-s = s-r = 1$):

$$\text{cor}[B_H(s+1) - B_H(s), B_H(s) - B_H(s-1)] = \text{cov}[B_H(s+1) - B_H(s), B_H(s) - B_H(s-1)] = 2^{2H-1} - 1.$$

W tej sytuacji dla $H = 0,5$ przyrosty są nieskorelowane, natomiast dla $H > 0,5$ korelacja jest dodatnia, zaś dla $H < 0,5$ ujemna. W drugim przypadku bardziej prawdopodobne jest występowanie kontynuacji istniejącego trendu (persystentność), natomiast w sytuacji gdy $H < 0,5$ jego odwracanie (antypersystentność). Powoduje to, że **w okresie krótkim bardziej zmienne są szeregi o wymiarze fraktalnym $\Delta > 1,5$** , jako że bardziej prawdopodobne są różnokierunkowe zmiany cen¹⁹⁹. Owo specyficzne „powracanie do średniej”²⁰⁰ sprawia jednak, że **w okresie długim to procesy o $\Delta < 1,5$ zdecydowanie bardziej odchylają się od poziomu uznanego za przeciętny**, a zatem w świetle określenia wiążącego ryzyko ze zmiennością, dla wydłużonych horyzontów inwestycyjnych to właśnie te procesy należy zakwalifikować jako cechujące się większym poziomem ryzyka. Powyższa analiza potwierdza sformułowane uprzednio wnioski.

Są one spójne z konkluzjami przedstawionymi przez Mandelbrota. Pokazał on, że dla ułamkowego ruchu Browna odchylenie standardowe przeciętnego przyrostu procesu na odcinku

o długości Δt wynosi $\sqrt{E\left(\frac{B_H(t+\Delta t) - B_H(t)}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{C_H} \Delta t^{H-1}$, gdzie C_H – stała (równa wariancji

przyrostu procesu dla $\Delta t = 1$)²⁰¹. Jak udowodniono, dla ułamkowego ruchu Browna $\Delta = 2 - H$, zatem można zapisać równoważnie, że $\sqrt{C_H} \Delta t^{H-1} = \sqrt{C_H} \Delta t^{1-\Delta}$. Stosunek odchyleń standardowych przeciętnych przyrostów procesów dla dwóch ułamkowych ruchów Browna o odmiennych współczynnikach samopodobieństwa (oraz wymiarach fraktalnych $\Delta_A > \Delta_B$, czyli $H_A < H_B$)

jest równy $\sqrt{\frac{C_{H_A}}{C_{H_B}} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^{\Delta_A - \Delta_B}}$. Gdy teraz $\Delta t \rightarrow 0$ to $\sqrt{\frac{C_{H_A}}{C_{H_B}} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^{\Delta_A - \Delta_B}} \rightarrow \infty$, zaś dla $\Delta t \rightarrow \infty$

zachodzi $\sqrt{\frac{C_{H_A}}{C_{H_B}} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^{\Delta_A - \Delta_B}} \rightarrow 0$.

¹⁹⁹ J. Stawicki, E. Janiak, I. Müller-Frączek: Różnicowanie fraktalne szeregów czasowych – wykładnik Hursta i wymiar fraktalny. [W:] Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9–11 września 1997. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 1997, s. 27–28. Co więcej, wydaje się, że persystentność szeregów jest czynnikiem ułatwiającym osiągnięcie ponadprzeciętnych stóp zwrotu w sytuacji stosowania metod analizy technicznej (co jest zrozumiałe, jako że znaczna część z nich opiera się właśnie na założeniu o kontynuacji istniejących trendów). Zob. E. Marcinkiewicz: Badanie zależności pomiędzy wartością wykładnika Hursta a skutecznością strategii inwestycyjnych opartych na analizie technicznej. „Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie”, Nr 60/2006.

²⁰⁰ Proces ten nie ma oczywiście charakteru procesu powracającego do średniej (*mean-reverting process*) w takim sensie, jak to ma miejsce np. w odniesieniu do procesu Ornsteina-Uhlenbecka.

²⁰¹ B. Mandelbrot: Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 1, Averages and Variances. „Water Resources Research”, Vol. 5, No. 1 February 1969.

Przeprowadzone rozumowanie oraz analiza zachowania procesów stochastycznych o znanych własnościach fraktalnych zmuszają do wyciągnięcia wniosku, że **dotychczasowy pogląd na relację pomiędzy wymiarem fraktalnym a poziomem ryzyka inwestycyjnego był poprawny jedynie dla nieskończone krótkich horyzontów inwestycyjnych**. Zdecydowanie częściej przyjmowanym w nauce finansów założeniem jest rozpatrywanie analizowanych zjawisk w okresie długim – a nawet nieskończone długim, jak to często przyjmuje się np. w dochodowej teorii wyceny instrumentów finansowych²⁰². Przyjęcie takiego punktu widzenia nieuchronnie prowadzi do konkluzji, że bardziej istotne są relacje zachodzące dla okresów długich – a nawet nieskończone długich. W tej sytuacji dotychczasowy pogląd okazuje się być całkowicie błędny – w tym bowiem przypadku kierunek zależności pomiędzy wymiarem fraktalnym a poziomem ryzyka jest dokładnie odwrotny, niż w sytuacji gdy $T_1 \rightarrow 0$. Dlatego też interpretacje wyników badań empirycznych nieuwzględniające opisywanych zależności należy traktować z pewną ostrożnością (jak to zostało pokazane na przykładzie dotyczącym najistotniejszych indeksów giełdy warszawskiej).

Przedstawiona metodyka oceny ryzyka inwestycyjnego ma zastosowanie wówczas, gdy badane instrumenty finansowe cechują się zróżnicowanymi wymiarami fraktalnymi. W szczególnym przypadku, gdy mamy do czynienia z procesem błędzenia losowego, cała informacja niezbędna dla oceny ryzykowności inwestycji (przy założeniu normalności i identyczności rozkładu) jest zawarta w odchyleniu standardowym stopy zwrotu. W innych przypadkach owa informacja jest rozproszona – jakkolwiek jej część nadal jest dostarczana przez klasyczne miary ryzyka, to jednak ze względu na ich statyczny charakter brak jest możliwości dokonania oceny w ujęciu dynamicznym. Problem ten staje się jeszcze bardziej złożony, gdy wymiary fraktalne instrumentów są zróżnicowane – wówczas skala utraty informacji jest jeszcze większa. W tej sytuacji znajomość wymiarów fraktalnych i współczynników samopodobieństwa analizowanych szeregów czasowych może choćby częściowo zrekompensować ów niedobór.

Opierając się na powyższych rozważaniach, należy uznać, że **istotną kwestią z punktu widzenia inwestora jest zatem stwierdzenie, czy wymiary fraktalne instrumentów finansowych są jednakowe, czy też nie, i jak znaczące jest ich ewentualne zróżnicowanie**. Dotychczasowe badania wskazywały na ogół na występowanie takich odmienności, jednak brak jest kompleksowych analiz wykorzystujących najnowsze dane pochodzące z polskiego rynku akcji. Dlatego też autor postanowił zbadać wspomniane szeregi czasowe, będąc przekonanym, że postawiona przezeń hipoteza badawcza, głosząca, iż takie zróżnicowanie w rzeczywistości występuje i ma istotny wpływ na poziom ryzyka inwestycyjnego, nie zostanie sfalsyfikowana, lecz okaże hart skonfrontowana z danymi empirycznymi.

2.3. Konkluzje

Wnioski zaprezentowane w niniejszym rozdziale stanowią podsumowanie rozważań natury teoriopoznawczej. Zamierzeniem autora było pokazanie, że powszechnie wykorzystywany model Samuelsona-Osborne'a jest w rzeczywistości tylko jednym z przypadków szczególnych teorii bardziej uniwersalnej. Jakkolwiek przejściu od teorii błędzenia losowego do teorii rynku fraktalnego towarzyszy zmniejszanie się stopnia ścisłości (w rozumieniu popperowskim)²⁰³, to jednak w chwili obecnej wydaje się, że jest ono niezbędne ze względu na zbyt wiele przesłanek przemawiają-

²⁰² Zob. np. M. Gordon: *The Investment, Financing, and the Valuation of the Corporation*. Richard D. Irwin, Homewood 1962, s. 43–66.

²⁰³ K. Popper: *Logika odkrycia naukowego*. WN PWN, Warszawa 2002, s. 101–104.

cych na niekorzyść pierwszej z nich. Efektem jest konieczność dokonania gruntownych zmian w metodyce oceny poziomu ryzyka inwestycji finansowych. Zasadniczym celem autora (w jego mniemaniu zrealizowanym) było pokazanie, że istnieje instrumentarium umożliwiające wypełnienie powstałej luki – a kluczowa jest dlań idea wymiaru niecałkowitego.

Należy stwierdzić, że dotychczasowa metodyka oceny poziomu ryzyka inwestycyjnego, mimo swej prostoty i czytelnej interpretacji, nie spełniła wszystkich pokładanych w niej nadziei. Z drugiej strony, zdanie Mandelbrota całkowicie deprecjonujące jej użyteczność dla celów praktycznych jest w opinii autora niniejszej pracy nazbyt rygorystyczne. Przy niespełnieniu pewnych założeń nie traci bowiem ona całkowicie na znaczeniu, choć ubytek informacji jest na tyle znaczny, że wyniki analiz mogą nie oddawać złożoności relacji panujących na rynku kapitałowym. Jak starano się pokazać, ów niedostatek informacji jest w stanie częściowo zniwelować znajomość wymiaru fraktalnego szeregu czasowego. Należy zatem zdecydowanie odrzucić opinię Krantza stwierdzającego, że „Hipotezy i wnioski przedstawiane przez badaczy fraktali (podobnie jak obiekty, które analizują) odnoszą się same do siebie. Tworzy się obrazki, żeby dowiedzieć się więcej o obrazkach, a nie żeby osiągnąć głębsze zrozumienie”²⁰⁴. Analiza fraktalna jest w stanie dostarczyć odpowiedzi na pytania nurtujące uczonych wielu specjalności, także ekonomistów.

Poócz sformułowania konstatacji o niezbędności wykorzystania analizy fraktalnej dla poprawności i kompleksowości oceny ryzykowności inwestycji w rozdziale zweryfikowano (negatywnie) hipotezę głoszącą, że wzrost wymiaru fraktalnego jest tożsamy ze zwiększeniem się ryzykowności inwestycji. Jak wykazano, kierunek relacji pomiędzy poziomem wymiaru fraktalnego a poziomem ryzyka jest uzależniony od długości rozpatrywanego horyzontu inwestycyjnego, przy czym dla okresów nieskończenie krótkich związek ten jest jednokierunkowy, zaś dla nieskończenie długich kierunki zmian są przeciwne. Doprecyzowanie wspomnianej zależności zmusza do zrewidowania rezultatów dotychczasowych badań nad fraktalnym charakterem finansowych szeregów czasowych.

Ponadto zaprezentowano potencjalne mechanizmy odpowiadające za fakt, że szeregi czasowe cen i stóp zwrotu mają charakter fraktalny. Jako że jednoznaczne określenie, który z nich ma wpływ dominujący na zachowanie cen i stóp zwrotu, jest obecnie praktycznie niewykonalne, słuszne wydaje się przyjęcie, że mechanizmy te koegzystują. Jest wątpliwe, by także w przyszłości było możliwe dokonanie takiego rozstrzygnięcia. Dlatego też o charakterze tych mechanizmów wnioskować można jedynie pośrednio, poprzez analizę własności fraktalnych odpowiednich szeregów czasowych.

Kolejnym krokiem, po zrealizowaniu celów teoriopoznawczych, jest zbadanie, w jakim stopniu opisywana koncepcja oddaje rzeczywiste fluktuacje na rynkach finansowych. W tym celu niezbędne okaże się przedstawienie praktycznych metod szacowania wspomnianych wielkości w odniesieniu do empirycznych finansowych szeregów czasowych. Wskazanym problemom poświęcono więc kolejny rozdział.

²⁰⁴ S. Krantz: Op. cit., s. 15.

Rozdział III

Metodyka estymacji wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych

Zakres nauki jest nieograniczony; jej materiał jest nieskończony, każda grupa zjawisk naturalnych, każda faza życia społecznego, każdy etap przeszłego lub bieżącego rozwoju jest materiałem dla nauki. Jedność wszystkich nauk zawiera się w metodzie, nie w materiale.

K. Pearson

*Nie wszystko co ma wartość można policzyć.
Nie wszystko co policzono ma wartość.*

Autor nieznany

Przedmiotem rozważań przedstawionych w niniejszym rozdziale są **metody szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych**. W piśmiennictwie zaprezentowano dotychczas pokaźną liczbę zróżnicowanych i niezmiernie interesujących metod służących określeniu wymiaru badanych obiektów. Nie wszystkie z nich mogą mieć jednak zastosowanie w przypadku specyficznego przedmiotu badania, jakim są szeregi czasowe cen bądź stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Niektóre z kolei są przydatne wyłącznie w sytuacji dysponowania materiałem badawczym, co do którego zachodzi pewność, że cechują go odpowiednie własności. Z powyższych względów nie wszystkie opracowane metody szacowania wymiaru fraktalnego mogą (a nie wszystkie powinny) być stosowane. Co więcej, ich mnogość wyklucza możliwość zaprezentowania większości z nich, zwłaszcza jeżeli uwzględnić metody prowadzące do oszacowań pośrednich. Przedstawione uwarunkowania sprawiły, że autor postanowił w niniejszej pracy przeanalizować, a następnie wykorzystać w badaniach empirycznych jedynie wybrane, uznane w trakcie dalszych rozważań za najstosowniejsze, metody.

3.1. Metoda pudełkowa

Metoda pudełkowa szacowania wymiaru fraktalnego jest odzwierciedleniem zmodyfikowanej fundamentalnej definicji wymiaru Minkowskiego-Bouliganda:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Bezpośrednie wykorzystanie przedstawionej równości jest możliwe jedynie w odniesieniu do fraktali abstrakcyjnych, w przypadku fraktali naturalnych bowiem operowanie pojęciem granicy w zerre staje się niecelowe. Z tego też względu konieczne jest posłkowanie się zależnością prawdziwą

(co najmniej w przybliżeniu) także dla innego zakresu zmienności ε . Co więcej, należy także określić, jak rozumieć $N_\varepsilon(X)$.

Proste przekształcenie przedstawionej równości definicyjnej prowadzi do:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\dim_B(X) \ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1,$$

co sugeruje zależność typu:

$$N_\varepsilon(X) = c_\varepsilon \varepsilon^{-\dim_B(X)},$$

czyli:

$$\ln N_\varepsilon(X) = \dim_B(X) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln c_\varepsilon,$$

przy czym $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln c_\varepsilon}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 0$, $c_\varepsilon > 0$. W rezultacie niezbędne jest oszacowanie parametrów zależności

liniowej, którego najczęściej dokonuje się, przyjmując założenia modelu Gaussa-Markowa²⁰⁵ i wykorzystując klasyczną metodę najmniejszych kwadratów.

Pośród ekwiwalentnych w ujęciu teoretycznym sposobów obioru $N_\varepsilon(X)$ najczęściej wykorzystywana w praktyce jest **kalkulacja oparta o siatki kwadratowe**. W przypadku fraktali abstrakcyjnych kwestia ta jest najzupełniej nieistotna, jednak w sytuacji gdy niemożliwe jest osiągnięcie dowolnej dokładności pomiaru, nabiera ona znaczenia. Przedstawione konkurencyjne sposoby określenia $N_\varepsilon(X)$ są niedogodne dla celów rachunkowych, także w sytuacji posługiwania się współczesnymi zaawansowanymi narzędziami informatycznymi. Dlatego też w niniejszej pracy postanowiono szacować wymiar fraktalny uznając $N_\varepsilon(X)$ za liczbę kwadratów siatki o boku ε mających co najmniej jeden punkt wspólny ze zbiorem X .

Relatywnie rzadko podnoszony jest **problem wyrażenia zmiennej niezależnej i zmiennej badanej w różnych jednostkach i skalach**. Jest to jednak problem istotny, w przypadku finansowych szeregów czasowych analizujemy bowiem zależność pomiędzy czasem a zmienną wyrażoną najczęściej w jednostkach pieniężnych lub procentach. Brak współmierności wskazanych wielkości zmusza do postawienia pytania, czy wyrażenie jednej lub drugiej z nich w innych jednostkach prowadzi do zmiany uzyskiwanego oszacowania? Jak zostanie poniżej pokazane, ewentualna zmiana skali w odniesieniu do całego wykresu nie wpływa na rzeczywisty i szacowany wymiar fraktalny.

Załóżmy, że dla danego szeregu, reprezentowanego przez zbiór X , o długości T mamy:

$$N_\varepsilon(X) = c_\varepsilon \varepsilon^{-\dim_B(X)}.$$

Wtedy w jednym pionowym pasie o szerokości ε znajduje się przeciętnie rzecz biorąc (przy liczbie pasów wynoszącej $\frac{T}{\varepsilon}$) $c_\varepsilon \varepsilon^{-\dim_B(X)} \cdot \frac{T}{\varepsilon} = \frac{c_\varepsilon}{\varepsilon} \varepsilon^{1-\dim_B(X)}$ kwadratów²⁰⁶. Jeżeli teraz zmienić

skalę zmiennej badanej, tak że dotychczasowy kwadrat o boku ε staje się prostokątem o podstawie ε i boku $\varphi\varepsilon$, to ich liczba w pojedynczym pionowym pasie wynosić będzie $\frac{c_\varepsilon \varphi^{1-\dim_B(X)}}{T} \varepsilon^{1-\dim_B(X)}$,

a zatem po zmianie skali uzyskamy $N_{\varepsilon, \varphi}(X) = \frac{c_\varepsilon \varphi^{1-\dim_B(X)}}{T} \varepsilon^{1-\dim_B(X)} \cdot \frac{T}{\varepsilon} = c_\varepsilon \varphi^{1-\dim_B(X)} \varepsilon^{-\dim_B(X)}$ prostokątów. Jeżeli teraz kalkulując wymiar fraktalny wykorzystać $N_{\varepsilon, \varphi}(X)$ zamiast $N_\varepsilon(X)$, to:

²⁰⁵ A. Welfe: Ekonometria. PWE, Warszawa 2003, s. 29–38.

²⁰⁶ Różnice wynikające z faktu, że analizowana liczba może nie być całkowita, pominięto jako nieistotne w tym przypadku.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon, \varphi}(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln c_{\varepsilon} \varphi^{1-\dim_B(X)} \varepsilon^{-\dim_B(X)}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \dim_B(X) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln c_{\varepsilon} \varphi^{1-\dim_B(X)}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \dim_B(X),$$

a zatem zmiana skali zmiennej badanej nie skutkuje zmianą teoretycznego wymiaru fraktalnego badanego szeregu. Pojawia się jednak pytanie, czy ten zabieg nie wpływa na oszacowania dokonywane w oparciu o dane empiryczne. Analogicznie jak poprzednio możemy zapisać:

$$\ln N_{\varepsilon, \varphi}(X) = \dim_B(X) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln c_{\varepsilon} \varphi^{1-\dim_B(X)}.$$

Zastosowana procedura sprawiła jedynie, że zmianie uległa wartość wyrazu wolnego, lecz nie kierunkowego, którego oszacowanie jest w istocie przybliżeniem wymiaru fraktalnego. A zatem **zmiana skali zmiennej badanej nie wpływa na wartość teoretyczną i estymowaną wymiaru fraktalnego**. Analogicznie można pokazać, że **przeskalowanie zmiennej niezależnej również nie oddziałuje na rzeczywisty i szacowany poziom wymiaru fraktalnego**. W zależności zatem od charakteru danych, jakie poddawane są analizie, można dla wygody obliczeniowej wykorzystać miast siatki kwadratowej siatkę prostokątną, względnie dokonać zmiany skal tak, by wykres był zawarty np. w kwadracie jednostkowym i wówczas zastosować klasyczną metodę pudełkową. Stwierdzenie to jest o tyle istotne, że pozwala usunąć niedogodności związane z operowaniem różnymi jednostkami i skalami.

Wśród problemów związanych z szacowaniem wymiaru fraktalnego szeregów czasowych najważniejszym i jednocześnie niemożliwym do wyeliminowania jest wspomniana już **kwestia dyskretności danych** (*resolution problem*)²⁰⁷. Jeżeli uznawać szereg czasowy o długości T za zbiór punktów, wówczas:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon, \varphi}(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(T+1)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 0,$$

zatem podejście takie jest niecelowe. Jeśli traktować analizowany szereg jako łamaną łączącą kolejne punkty, to zmniejszając bok prostokąta tak, że amplitudy wahań w danym pasie pionowym są proporcjonalne do długości jego boku, liczba prostokątów niezbędnych do pokrycia wykresu w każdym z nich wynosi $A\varepsilon: \varphi\varepsilon = \frac{A}{\varphi}$, $A > 0$, czyli ogółem:

$$N_{\varepsilon, \varphi}(X) = \frac{A}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Stąd:

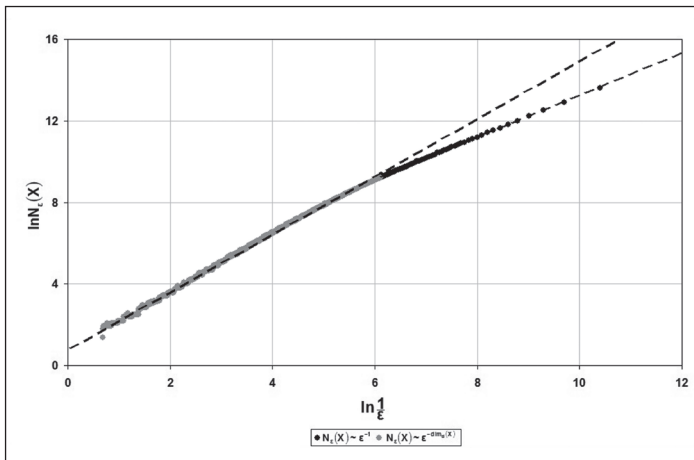
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon, \varphi}(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{A}{\varphi} + \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1.$$

Błąd, jaki można wówczas popełnić przy szacowaniu wymiaru fraktalnego, został przedstawiony graficznie na wykresie (rys. 35, s. 84), pokazującym zmianę zachowania wielkości $\ln N_{\varepsilon}(X)$ po przekroczeniu pewnego punktu granicznego.

Opisywanego problemu nie można rozwiązać inaczej, jak poprzez rezygnację z kalkulowania żądanych wielkości dla niewielkich ε . Powoduje to nieuchronnie utratę pewnej informacji, jednak zapobiega istotnym zniekształceniom uzyskiwanych rezultatów. W przeciwnym wypadku można by bowiem dojść do fałszywego przekonania, że obiekt ma charakter multifraktalny²⁰⁸.

²⁰⁷ J. Schmittbuhl, J.-P. Vilotte: Reliability of self-affine measurements. „Physical Review E”, Vol. 51, No. 1 January 1995, s. 133–134.

²⁰⁸ S. Buczkowski, P. Hildgen, L. Cartilier: Measurements of fractal dimension by box-counting: a critical analysis of data scatter. „Physica A”, No. 252/1998, s. 29–32.



Rys. 35. Zmiana typu zależności pomiędzy $\ln N_\epsilon(X)$ a $\ln \frac{1}{\epsilon}$ wynikająca z dyskretnego charakteru analizowanych danych

Źródło: Opracowanie własne.

Drugim zasadniczym problemem związanym z szacowaniem wymiaru fraktalnego za pomocą metody pudełkowej jest tzw. **problem krawędzi** (*edge effect*)²⁰⁹. W metodzie pudełkowej zliczany jest bowiem każdy kwadrat mający punkt wspólny z badanym obiektem, nawet jeżeli byłby to wyłącznie jeden punkt. Fakt ten może powodować, że (szczególnie dla dużych ϵ) liczba kwadratów czy prostokątów będzie przeszacowana, co automatycznie skutkuje zawyżaniem uzyskiwanej oceny wymiaru fraktalnego. W celu rozwiązania tej trudności stworzono omawiane dalej specyficzne odmiany metody pudełkowej.

3.2. Metoda segmentowo-wariacyjna

Metoda nazwana segmentowo-wariacyjną jest metodą opierającą się na idei wykorzystanej w metodzie pudełkowej, lecz w odmienny sposób podchodzi się w niej do sposobu zliczania kwadratów czy prostokątów pokrywających wykres. O ile bowiem w poprzedniej uwzględniane są wszystkie kwadraty stosownej siatki kwadratowej, o tyle procedura w metodzie segmentowo-wariacyjnej jest bardziej skomplikowana. Jej celem jest wyeliminowanie wspomnianego „efektu krawędzi”.

Problemy numeryczne pojawiające się wskutek uwzględniania wszystkich kwadratów mających co najmniej jeden punkt wspólny z danym obiektem zostały podniesione w szeregu artykułów Patricii Carter, Roberta Cawleya i in. Postępowanie to (uzasadnione w świetle definicji formalnej) może jednak skutkować zawyżaniem szacowanego wymiaru fraktalnego²¹⁰. Konieczne stało się takie zmodyfikowanie metody pudełkowej szacowania wymiaru fraktalnego, by ewentualne zbędne „nadwyżkowe” kwadraty nie były uwzględniane w procesie sumowania. W tym celu Autorzy zaproponowali wykorzystanie tzw. „kwadratów rzeczywistych” – metody umożliwiającej zliczanie niecałkowitej liczby kwadratów. Dla uproszczenia zapisu w dalszej części będziemy rozpatrywać wymiar fraktalny funkcji ciągłych określonych na przedziale $\langle 0, T \rangle$. Posunięcie to

²⁰⁹ C. Taylor, J. Taylor: Estimating the Dimension of a Fractal. „Journal of the Royal Statistical Society”, Vol. 53, No. 2/1991, s. 355–356.

²¹⁰ P. Carter, R. Cawley, J. Yorke, M. Melnik: Dimension Measurements from Cloud Radiance. [In:] G. Mayer-Kress (ed.): Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Springer, Berlin 1986, s. 219, przyp. 1.

jest uzasadnione przedmiotem badań oraz twierdzeniem głoszącym, że wymiar fraktalny nie ulega w takim przypadku zmianom pod wpływem przekształceń afinicznych²¹¹. A zatem przez zbiór X należy dalej rozumieć $X = \{(x, f(x)) : x \in \langle 0, T \rangle\}$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą.

W pierwszej kolejności dokonywany jest podział z wykorzystaniem pionowych pasów o szerokości ε . O ile w metodzie tradycyjnej w każdym pasie zliczano by liczbę kwadratów mających co najmniej jeden punkt wspólny z danym obiektem, to teraz określa się wartość wielkości:

$$h_k = \sup_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x) - \inf_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x),$$

czy też w danym przypadku ekwiwalentnie:

$$h_k = \max_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x) - \min_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x).$$

Następnie dla każdego pasa obliczana jest liczba „kwadratów rzeczywistych”²¹²:

$$N'_{\varepsilon, k}(X) = \frac{h_k}{\varepsilon}$$

oraz ich sumaryczna liczba:

$$N'_\varepsilon(X) = \sum_{k=1}^n N'_{\varepsilon, k}(X),$$

gdzie $n = \frac{T}{\varepsilon}$, przy czym zakłada się, że $\frac{T}{\varepsilon} \in \mathbb{Z}$. Wymiar fraktalny można w tej sytuacji obliczać, wykorzystując $N'_\varepsilon(X)$:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

co wynika z następującego twierdzenia: **dla dowolnej, różnej od stałej, ciągłej funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle 0, T \rangle$ jeżeli istnieje granica:**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

to istnieje także granica:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

i są one równe²¹³. Wykorzystanie „kwadratów rzeczywistych” skutkuje jednak eliminacją (przynajmniej częściową) obciążenia występującego w metodzie pudełkowej.

Zaprezentowana metoda Carter et al. nie pozwala jednak dostatecznie wykorzystać dostępnych informacji, jej stosowanie jest bowiem ograniczone do takiego zakresu zmienności ε , dla którego $\frac{T}{\varepsilon}$ pozostaje liczbą całkowitą. Rozwiązanie tej kwestii może być różne. W pierwszej

²¹¹ C. Adler, P. Carter, R. Cawley: A Comparison of the Fractal Dimensions of Cloud Radiance Graphs for Two Infrared Color Bands. „Lecture Notes in Physics”, Vol. 278/1987, s. 46.

²¹² Autorzy początkowo sugerowali wykorzystanie wielkości $\left[\frac{h_k}{\varepsilon}\right] + 1$, będącej liczbą całkowitą większą od zera, co pozwala uniknąć problemów związanych z przypadkiem, gdy analizowana funkcja jest stała. W pozostałych sytuacjach nie prowadzi ona jednak do eliminacji efektu krawędzi. Zob. P. Carter, R. Cawley, J. Yorke, M. Melnik: Op. cit., s. 218–219.

²¹³ Zmodyfikowana wersja twierdzenia zamieszczonego w: P. Carter, R. Cawley, D. Mauldin: Mathematics of Dimension Measurement for Graphs of Functions. [In:] D. Weitz, L. Sander, B. Mandelbrot (eds.): Fractal Aspects of Materials. Materials Research Society, Pittsburgh 1988, s. 185. Przypadek funkcji stałej wyłączono z rozważań, dla funkcji

stałej mamy bowiem $N_\varepsilon(X) = \frac{T}{\varepsilon}$ (ew. $N_\varepsilon(X) = \frac{2T}{\varepsilon}$, przy czym zakładamy, że $\frac{T}{\varepsilon} \in \mathbb{Z}$), skąd $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1$, zaś

$N'_\varepsilon(X) = 0$ i granica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ jest wówczas nieokreślona.

kolejności można przyjąć, że jeżeli $\frac{T}{\varepsilon}$ jest niecałkowite, kwadraty wykraczające poza przedział $\langle 0, T \rangle$ są zliczane tak, jak pozostałe. Postępowanie to prowadzi jednak tylko do zaostżenia „problemu krawędzi”. Innym rozwiązaniem może być pominięcie w obliczeniach tego fragmentu wykresu badanej funkcji, który zawiera się w przedziale $\langle \varepsilon \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor, T \rangle$. Skutkiem jest jednak utrata pewnej informacji, która może być istotna dla szacowania wymiaru fraktalnego. Trzecim wyjściem jest zastosowanie metody „kwadratów rzeczywistych” nie tylko do osi zmiennej zależnej, lecz także zmiennej niezależnej. Modyfikację taką wprowadziła Zwolankowska w miejsce metody wariacyjnej, proponując **metodę segmentowo-wariacyjną**²¹⁴.

W opisywanej pokrótce w poprzednim rozdziale metodzie nie kalkuluje się bezpośrednio liczby odpowiednich kwadratów, lecz oblicza się pole przez nie zajmowane. W ten sposób ewentualny ostatni niepełny przedział jest także uwzględniany w następujący sposób: dla $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor$ rozstęp w każdym przedziale uzyskiwany jest z wykorzystaniem standardowej formuły:

$$h_k = \max_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x) - \min_{x \in ((k-1)\varepsilon, k\varepsilon)} f(x),$$

zaś dla ostatniego niepełnego przedziału (jeśli występuje) jako:

$$h_{\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor + 1} = \max_{x \in (\varepsilon \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor, T)} f(x) - \min_{x \in (\varepsilon \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor, T)} f(x).$$

Następnie obliczane jest pole wszystkich prostokątów ograniczonych w każdym segmencie wartością minimalną i maksymalną funkcji:

$$\Gamma_\varepsilon(X) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor} h_k \varepsilon + h_{\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor + 1} (T - \varepsilon \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor).$$

Posiłkując się tą wielkością, można obliczyć liczbę „kwadratów rzeczywistych” niezbędnych do pokrycia wykresu funkcji jako $\frac{\Gamma_\varepsilon(X)}{\varepsilon^2}$ i wykorzystać uzyskaną wartość do oszacowania wymiaru fraktalnego. Najczęściej stosuje się wzór bezpośrednio uwzględniający owo pole, bowiem:

$$\dim_B(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\Gamma_\varepsilon(X)}{\varepsilon^2}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_\varepsilon(X)}{\ln \varepsilon}.$$

W obliczeniach praktycznych można zatem wykorzystywać także regresję postaci:

$$\ln \Gamma_\varepsilon(X) = [\dim_B(X) - 2] \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln c_\varepsilon,$$

względnie:

$$\ln \frac{\Gamma_\varepsilon(X)}{\varepsilon^2} = \dim_B(X) \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln c_\varepsilon.$$

Pewnym *novum* w metodzie Zwolankowskiej jest sposób doboru wartości ε . Otóż mimo że można by wykorzystać *de facto* wszystkie elementy ze zbioru $\langle 1, 2, \dots, T \rangle$ (gdzie T – długość szeregu, tj. liczba obserwacji pomniejszona o jednostkę), to jednak jak zauważyła Autorka, wykorzystanie niektórych wartości skutkowałoby nadmiernym wpływem wybranych obserwacji wskutek dublowania się niektórych prostokątów. Dlatego też słuszną wydaje się metoda obierania wyjściowej wartości ε jako szerokości prostokąta zawierającego taką liczbę sąsiednich punktów, która jest liczbą pierwszą. Obserwacje i analizy empiryczne Autorki doprowadziły do sformułowania

²¹⁴ M. Zwolankowska: Szacowanie lokalnego wymiaru fraktalnego szeregów czasowych. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 233/1998; M. Zwolankowska: Metoda..., op. cit.; M Zwolankowska: Fraktalna..., op. cit.

przez nią wniosku, że najbardziej celowe z punktu widzenia dokładności oszacowań i wydajności numerycznej jest uwzględnianie wyłącznie prostokątów zawierających odpowiednio 2, 3, 5 i 7 punktów oraz ich wielokrotności, tj. prostokątów o szerokościach odpowiednio $2k-1$, $3k-1$, $5k-1$, $7k-1$, $k \in \mathbb{N}_+$ (przy czym nie może ona przekroczyć połowy długości szeregu).

W efekcie zastosowania opisywanej metody otrzymujemy cztery oszacowania wymiaru fraktalnego badanego szeregu czasowego: $\dim_{B,1}(X)$, $\dim_{B,2}(X)$, $\dim_{B,3}(X)$ oraz $\dim_{B,4}(X)$. Powstaje jednak problem, którą z nich uznać za najtrafniejszą. W pierwszej kolejności należy obliczyć średni wymiar fraktalny $\dim_{B,S}(X)$. Jeżeli teraz $\dim_{B,S}(X) = 1,5$, wówczas za wymiar fraktalny danego szeregu przyjmujemy 1,5. Z kolei gdy $\dim_{B,S}(X) < 1,5$, wtedy za oszacowanie wymiaru fraktalnego przyjmujemy $\min_{i=1,2,3,4} \{ \dim_{B,i}(X) \}$. Jeżeli jednak $\dim_{B,S}(X) > 1,5$, wtedy należy uznać, że wymiar fraktalny szeregu wynosi $\max_{i=1,2,3,4} \{ \dim_{B,i}(X) \}$.

Posiłkując się opisywaną metodą, należy pamiętać, że jest ona stosowana najczęściej do badania szeregów cen, względnie skumulowanych stóp zwrotu (najczęściej logarytmicznych). Ponieważ takie podejście jest rozpowszechnione w literaturze (co wynika z właściwości analizowanych procesów), zostało ono zastosowane także w niniejszej monografii. Należy ponadto mieć na uwadze, że porównania z wymiarami fraktalnymi szeregów przyrostów cen lub stóp zwrotu są nieuprawnione i mylące, wielkości te różnią się bowiem diametralnie. W dalszej części rozdziału zostanie przedstawiona analiza dokładności i stabilności wymiarów fraktalnych szacowanych z jej pomocą.

3.3. Metoda podziału pola

Metoda podziału pola została stworzona jako modyfikacja metody segmentowo-wariacyjnej. Opiera się ona (podobnie jak metoda Zwolankowskiej) na badaniu, jak zachowuje się pole pewnych prostokątów, gdy zmniejszamy ich rozmiary. W tym przypadku filozofia szacowania wymiaru fraktalnego jest jednak zdecydowanie odmienna²¹⁵.

W metodzie podziału pola zaproponowanej przez Grzegorza Przekotę wykres analizowanej funkcji jest pokrywany najmniejszym prostokątem (o bokach równoległych do osi układu współrzędnych) zawierającym wykres. Postępowanie to oparte jest na następującym spostrzeżeniu. Dla danego prostokąta o bokach długości a (podstawa) oraz b (wysokość) pole wynosi ab . Dzieląc ów prostokąt na połowy linią równoległą do wysokości, otrzymamy dwa prostokąty o wymiarach $\frac{a}{2} \times b$ i pole wynoszącym $\frac{ab}{2}$. Łączne pole uzyskanych prostokątów wyniesie zatem ab . Oznaczając teraz pole badanych figur przed podziałem przez P oraz po podziale przez p , dostaniemy: $P = ab$ oraz $p = 2 \cdot \frac{ab}{2} = ab$. Zachodzi zatem relacja:

$$p = 2 \cdot \frac{P}{2}.$$

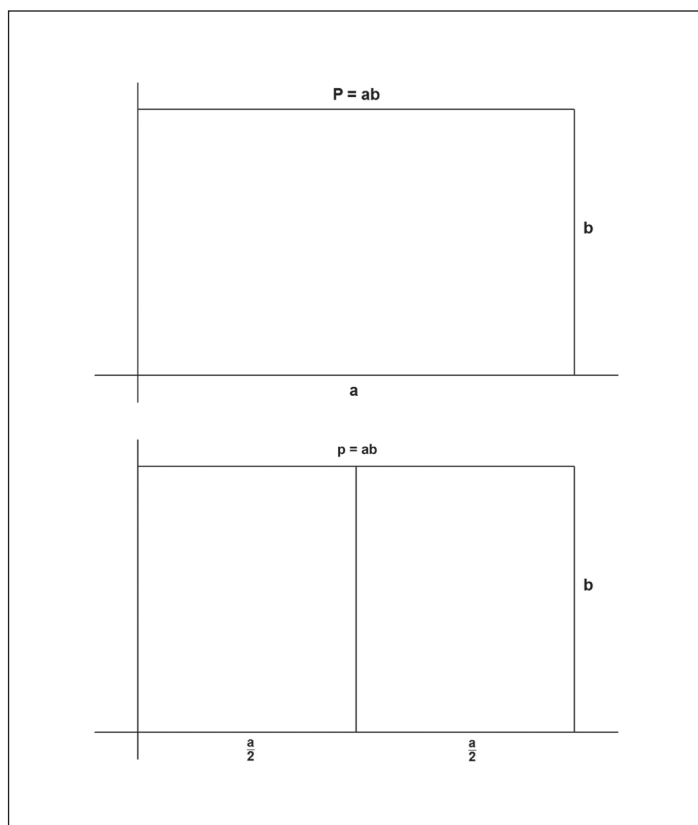
W tym przypadku iloraz $\frac{P}{2}$ jest mnożony przez wymiar fraktalny badanego obiektu (a jest nim prostokąt) w celu uzyskania pola figur po podziale. Podobnie w odniesieniu do linii prostej można zauważyć, że pole początkowego prostokąta wyniesie $P = ab$, lecz pole dwóch prostokątów po podziale pokrywających daną linię zmniejszy się do $p = \frac{ab}{2}$. W tej sytuacji:

$$p = 1 \cdot \frac{P}{2}$$

²¹⁵ Za: R. Buła: Modified method of area division in fractal dimension estimation. [In:] M. Čulík (ed.): Financial Management of Firms and Financial Institutions. VŠB-Technical University of Ostrava, Ostrava 2017.

i rzeczywiście linia prosta ma wymiar wynoszący dokładnie 1. W opisywanych przypadkach dalsze połowienie prostokątów nie zmienia postaci zależności wiążącej P oraz p . Można także zauważyć, że im częściej wykres danej funkcji będzie ulegał fluktuacjom, tym większe będzie pole prostokątów otrzymywanych po podziale. Jeżeli bowiem rozpatrywać daną funkcję na przedziale $\langle 0, T \rangle$, to wtedy $P = Th$, zaś $p = \frac{T}{2}(h_1 + h_2) = T\bar{h}$, gdzie h oznacza rozstęp funkcji na przedziale $\langle 0, T \rangle$, h_1 , h_2 – różnicę między maksymalną a minimalną wartością funkcji odpowiednio w pierwszym i drugim prostokącie (powstałymi po podziale), zaś przez \bar{h} oznaczono przeciętny rozstęp funkcji w nowo utworzonych prostokątach. Zatem $p = \frac{2\bar{h}}{h} \cdot \frac{P}{2}$, przy czym (ponieważ $p \leq P$ oraz $p \geq \frac{P}{2}$) zachodzi $\frac{2\bar{h}}{h} \in \langle 1, 2 \rangle$. Im większy stosunek \bar{h} do h , tym większy będzie iloraz $\frac{2\bar{h}}{h}$. Z powyższych przyczyn Autor traktuje ową wielkość jako specyficzny wymiar fraktalny, mogący stanowić użyteczną miarę ryzyka inwestycyjnego. (Zob. rys. 36).

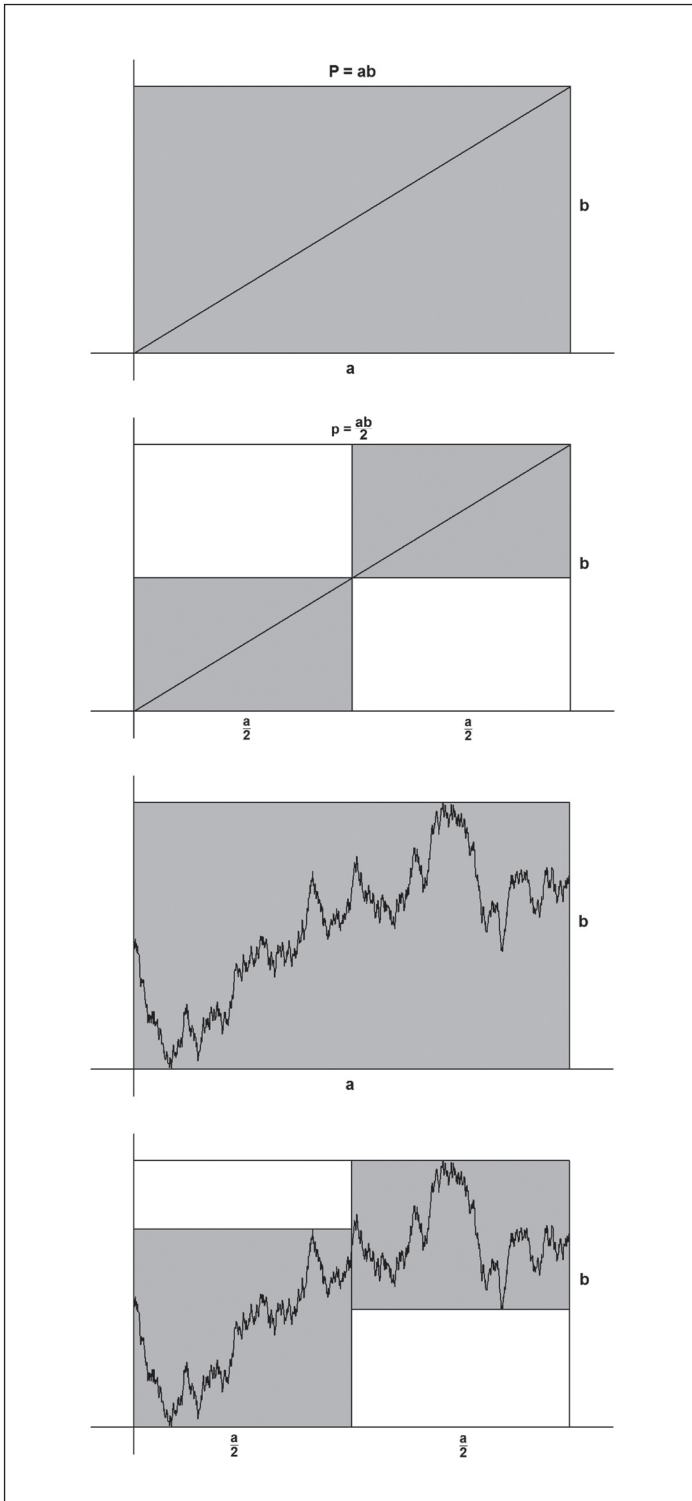
Procedura wyznaczania wymiaru fraktalnego w ujęciu Przekoty jest następująca²¹⁶. W pierwszym kroku na wykres funkcji nanoszony jest prostokąt o długości podstawy równej długości przedziału, na którym funkcja jest rozpatrywana, zawierający wykres funkcji, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Następnie prostokąt ów jest dzielony na n przystających prostokątów, o podstawach długości $\frac{T}{n}$ (przy badaniu szeregów czasowych n jest dobierane tak,



Rys. 36. Idea metody podziału pola

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: G. Przekota: *Gospodarcze aspekty ryzyka na rynkach finansowych*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2014, s. 122–123.

²¹⁶ Za: G. Przekota: Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola. „Zeszyty Studiów Doktoranckich”, z. 12/2003, s. 50–53.



cd. Rys. 36. Idea metody podziału pola

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: G. Przekota: Gospodarcze aspekty ryzyka na rynkach finansowych. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2014, s. 122–123.

by $\frac{T}{n}$ było liczbą całkowitą parzystą, $n \in \{1, 2, \dots, T\}$). Dla każdego z prostokątów obliczana jest najmniejsza i największa wartość funkcji:

$$h_k^n = \max_{x \in \left((k-1)\frac{T}{n}, k\frac{T}{n} \right)} f(x) - \min_{x \in \left((k-1)\frac{T}{n}, k\frac{T}{n} \right)} f(x), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie przez h_k^n oznaczono rozstęp funkcji w k -tym prostokącie dla danego n . Pole rozważanych prostokątów wynosi zatem:

$$P_n = \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n h_k^n.$$

Następnie każdy z n prostokątów jest dzielony na dwa przystające o długości podstawy $\frac{T}{2n}$ oraz obliczane są rozstępy:

$$h_k'^n = \max_{x \in \left((k-1)\frac{T}{2n}, k\frac{T}{2n} \right)} f(x) - \min_{x \in \left((k-1)\frac{T}{2n}, k\frac{T}{2n} \right)} f(x), \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

oraz pole:

$$p_n = \frac{T}{2n} \sum_{k=1}^{2n} h_k'^n.$$

Przeprowadzając ową procedurę, otrzymujemy zbiór punktów postaci $\left(\frac{P_n}{2}, p_n \right)$. Wykorzystując zależność:

$$p_n = \dim_{\text{MPP}}(X) \cdot \frac{P_n}{2}$$

wymiar fraktalny szacowany z wykorzystaniem metody podziału pola $\dim_{\text{MPP}}(X)$ jest uzyskiwany jako nachylenie linii regresji p_n względem $\frac{P_n}{2}$ (należy pamiętać, że jest to regresja pomijająca wyraz wolny).

Metoda podziału pola, mniej rozpowszechniona w krajowej literaturze przedmiotu niż metoda segmentowo-wariacyjna, nie stała się dotychczas przedmiotem szerszych rozważań, choć była wykorzystywana przez jej twórcę w wielu rozmaitych badaniach. Zdaniem autora idea metody podziału pola, godna rozważenia jako inspiracja dla opracowania dokładniejszej i bardziej wiarygodnej metody szacowania wymiaru fraktalnego, w obecnej postaci jest jednak niemożliwa do zaakceptowania.

W pierwszej kolejności należy odnotować **brak jednoznaczności w posługiwaniu się przez twórcę metody pojęciem „długość szeregu czasowego”**, wynikający z dyskretnego charakteru danych. Przez długość szeregu należy w kontekście niniejszych analiz rozumieć liczbę obserwacji pomniejszoną o jednostkę, ewentualnie następnie przeskalowaną dla wygody badacza. Tymczasem Przekota utożsamia długość szeregu z liczbą obserwacji. Postępowanie to prowadzi to uzyskiwania wyników niepoprawnych metodycznie i nieodzwierciedlających stanu faktycznego. Przykładem jest szacowanie przez Autora wymiaru fraktalnego dwóch szeregów o 100 obserwacjach: $(1, 2, 1, 2, 1, \dots, 2)$ oraz $(1, 2, 3, \dots, 100)$. W pierwszym przypadku przyjmuje on, że $T = 100$, a następnie kalkuluje pola odpowiednich prostokątów. Założenie to jest niepoprawne, w rzeczywistości bowiem rozważany szereg jest szeregiem o długości 99.

Tab. 4. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 100-wyrazowego szeregu $(1, 2, 1, 2, \dots, 2)$ wg G. Przekoty

n	$\frac{T}{n}$	$\frac{T}{2n}$	P_n	p_n
1	100	50	100	100
2	50	25	100	100
5	20	10	100	100
10	10	5	100	100

Źródło: G. Przekota: Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola. „Zeszyty Studiów Doktoranckich”, z. 12/2003, s. 54.

Ponieważ zawsze $p_n = 2 \cdot \frac{P_n}{2}$, zatem $\dim_{MPP}(X) = 2$. W przypadku szeregu $(1, 2, 3, \dots, 100)$ dla $n = 1$ Przekota przyjmuje $T = 100$ i uzyskuje $P_1 = 100 \cdot (100 - 1) = 9900$. Obliczając p_1 , Autor twierdzi, że bada dwa szeregi o długości 50 (w świetle własnej definicji), gdy tymczasem *de facto* ich długość wynosi 49. Efektem jest zaniżenie p_1 i ostatecznie zbyt niska wartość wymiaru fraktalnego, wynosząca 0,9861 (zamiast 1).

Tab. 5. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 100-wyrazowego szeregu $(1, 2, 3, \dots, 100)$ wg G. Przekoty

n	$\frac{T}{n}$	$\frac{T}{2n}$	P_n	p_n
1	100	50	9900	4900
2	50	25	4900	2400
5	20	10	1900	900
10	10	5	900	400

Źródło: G. Przekota: Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola. „Zeszyty Studiów Doktoranckich”, z. 12/2003, s. 55.

W swej najnowszej publikacji poświęconej tej tematyce Autor stara się skorygować popełnioną omyłkę, lecz czyniąc to niekonsekwentnie (rozpatruje szereg o 101 obserwacjach poprawnie przypisując mu długość 100, lecz twierdząc, że jest to szereg o 100 obserwacjach), uzyskuje poprawny wynik drogą dokonywanych *ad hoc* poprawek. Tymczasem w obydwu przypadkach należy rozważyć szeregi o 101 obserwacjach i długości 100. W tej sytuacji dla szeregu $(1, 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1)$ wyniki są takie jak podane przez Przekotę (w pierwszym przypadku jego obliczenia dotyczą bowiem innej sytuacji niż opisana przezeń w założeniach – a mianowicie takiej, jak rozpatrywana przez autora niniejszej monografii), jednak w drugim poprawne są kalkulacje, których wyniki zestawiono w tabeli poniżej. Właściwie należy bowiem rozpatrzeć szereg $(0, 1, 2, \dots, 100)$.

Tab. 6. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 101-wyrazowego szeregu $(0, 1, 2, \dots, 100)$

n	$\frac{T}{n}$	$\frac{T}{2n}$	P_n	p_n
1	100	50	10000	5000
2	50	25	5000	2500
5	20	10	2000	1000
10	10	5	1000	500

Źródło: Opracowanie własne.

W badanym przypadku $p_n = 1 \cdot \frac{P_n}{2}$, zatem $\dim_{MPP}(X) = 1$, co jest wielkością poprawną. Stosując zatem omawiane metody w praktyce, należy mieć świadomość przedstawionych problemów.

Prócz wspomnianych kwestii metoda podziału pola budzi jednak wątpliwości natury metodycznej. W przypadku metody segmentowo-wariacyjnej pokazano bowiem, że skutkuje ona uzyskaniem oszacowania wymiaru pudełkowego. Tymczasem kalkulowane w metodzie podziału pola

nachylenie stosownej linii regresji nie musi prowadzić do otrzymania oceny wymiaru Minkowskiego-Bouliganda, lecz innej wielkości (być może powiązanej z nim funkcyjnie), której własności nie są jednak *a priori* znane. Nie wiadomo zatem, w jakiej relacji do wymiaru pudełkowego pozostaje wymiar oszacowany metodą podziału pola. Jego definicja wskazuje jedynie, że dla łamanej wynosi on 1 (czyli $\dim_{\text{MPP}}(X) = \dim_B(X)$), podobnie jak w przypadku krzywej wypełniającej płaszczyznę. Poza tymi skrajnymi przypadkami nic o wspomnianej zależności nie można powiedzieć. Może się okazać, że dla wykresów innych funkcji wielkości te są odmiennie. W sytuacji występowania rozbieżności porównywanie wartości wymiaru fraktalnego z uzyskanym metodą podziału pola byłoby bezcelowe. Po drugie, Autor metody nie przedstawił analizy stabilności uzyskiwanych oszacowań oraz popelnianego potencjalnie błędu. Celowe byłoby zatem jej przeprowadzenie oraz skonfrontowanie ich z odpowiednimi wartościami otrzymywanymi w przypadku stosowania metody segmentowo-wariacyjnej. Może się bowiem okazać, że metoda podziału pola skutkuje błędami większymi niż w przypadku innych metod szacowania wymiaru fraktalnego, co skłaniałoby do jej odrzucenia, ewentualnie modyfikacji.

Wstępne analizy oszacowań wymiaru fraktalnego metodą podziału pola skłoniły autora do przyjęcia następującej hipotezy: **metoda podziału pola niezależnie od długości analizowanego szeregu skutkuje uzyskiwaniem zaniżonych ocen wymiaru pudełkowego**. Przekonać się o poprawności niniejszego stwierdzenia na gruncie teoretycznym można w następujący sposób.

W metodzie podziału pola $\dim_{\text{MPP}}(X)$ uzyskuje się jako współczynnik regresji $\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}(X)$ względem $\frac{\Gamma_{\varepsilon}(X)}{2}$ (z pominięciem wyrazu wolnego), co implikuje postulowaną zależność typu $\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}(X) \sim \dim_{\text{MPP}}(X) \cdot \frac{\Gamma_{\varepsilon}(X)}{2}$ dla $\varepsilon \rightarrow 0$, czyli²¹⁷:

$$\dim_{\text{MPP}}(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}(X)}{\Gamma_{\varepsilon}(X)/2}.$$

Posiłkując się „kwadratami rzeczywistymi”, można otrzymać:

$$\dim_{\text{MPP}}(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 N'_{\frac{\varepsilon}{2}}(X)}{\varepsilon^2 N'_{\varepsilon}(X)} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N'_{\frac{\varepsilon}{2}}(X)}{N'_{\varepsilon}(X)},$$

a stąd, wykorzystując zależność $N'_{\varepsilon}(X) = c'_{\varepsilon} \varepsilon^{-\dim_B(X)}$:

$$\dim_{\text{MPP}}(X) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c'_{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\dim_B(X)}}{c'_{\varepsilon} \varepsilon^{-\dim_B(X)}} = 2^{\dim_B(X)-1}.$$

Wymiar, którego oszacowania dostarcza metoda podziału pola, jest zatem funkcyjnie powiązany z wymiarem pudełkowym, przy czym rozpatrywana funkcja nie jest tożsamościowa. Co więcej:

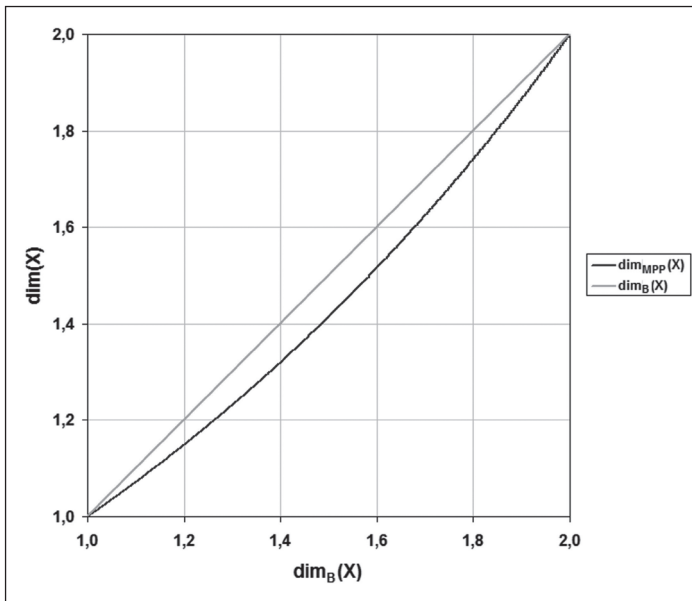
$$\dim_{\text{MPP}}(X) < \dim_B(X)$$

dla $\dim_B(X) \in (1, 2)$, zaś:

$$\dim_{\text{MPP}}(X) = \dim_B(X)$$

jedynie dla $\dim_B(X) \in \{1, 2\}$. Widać więc, że miara szacowana za pomocą metody podziału pola jest równa wymiarowi fraktalnemu na zbiorze miary zero, zaś we wszystkich pozostałych przypadkach jest od niego mniejsza – co dowodzi słuszności przedstawionego twierdzenia.

²¹⁷ Za: R. Buła: Metoda podziału pola a metoda segmentowo-wariacyjna szacowania wymiaru fraktalnego. [W:] M. Kuczera (red.): Nowe trendy w naukach humanistycznych i społeczno-ekonomicznych. Cz. 3. Tom III. Creativescience, Kraków 2012, s. 249–250.



Rys. 37. Wymiar szacowany metodą podziału pola a wymiar pudełkowy krzywych

Źródło: Opracowanie własne.

Jakkolwiek można więc traktować $\dim_{\text{MPP}}(X)$ za charakterystykę badanej krzywej, to jednak postępowanie takie należy uznać za bezcelowe. **Po pierwsze**, porównywanie oszacowanych wartości $\dim_{\text{MPP}}(X)$ z wynikami uzyskanymi przez innych badaczy jest niepoprawne z metodycznego punktu widzenia, w rzeczywistości bowiem prowadzi do konfrontowania odmiennych wielkości. **Po drugie**, własności wymiaru pudełkowego zostały dobrze poznane w przeciwieństwie do $\dim_{\text{MPP}}(X)$. **Po trzecie**, nieznana jest precyzja metod służących szacowaniu $\dim_{\text{MPP}}(X)$, co uniemożliwia formułowanie jakichkolwiek wniosków odnośnie do wiarygodności uzyskiwanych oszacowań²¹⁸. Dlatego też kolejnym krokiem będzie przedstawienie konkluzji sformułowanych w oparciu o wyniki badań poświęconych stabilności i dokładności otrzymywanych rezultatów.

3.4. Krytyczna analiza użyteczności metody segmentowo-wariacyjnej i podziału pola w szacowaniu wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych

Przedstawione uprzednio wątpliwości dotyczące jakości ocen uzyskanych za pomocą omawianych metod szacowania wymiaru fraktalnego sprawiły, że celowe stało się zbadanie ich własności poprzez skonfrontowanie wielkości estymowanych z rzeczywistymi w odniesieniu do rozmaitych szeregów czasowych.

²¹⁸ R. Buła: Aspekty metodyczne szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. [W:] M. Kuczera (red.): Młodzi naukowcy dla polskiej nauki. Cz. IX. Tom II. Creativetime, Kraków 2012, s. 195–196.

W pierwszej kolejności przeanalizowano dane wykorzystane przez Przekotę celem dokonania porównań oszacowanych przezeń wymiarów z wymiarami estymowanymi metodą segmentowo-wariacyjną. Wśród badanych szeregów czasowych znalazły się m.in. **szeregi kursów walut: dolara amerykańskiego, euro, franka szwajcarskiego oraz funta brytyjskiego** w okresie 04.01.1999–30.01.2004²¹⁹. Autor ma świadomość, że wykorzystane dane są istotnie odległe w czasie. Ponieważ jednak niniejszy punkt ma charakter wyłącznie metodyczny, za wskazane uznano odwołanie się do **oryginalnych danych zużytkowanych przez twórcę badanej metody**, by tym silniej zaakcentować jej ułomności.

Podobne kalkulacje zostały przeprowadzone dla **Warszawskiego Indeksu Giełdowego** (notowania w okresie 02.01.1995–19.09.2005) – zarówno w odniesieniu do poziomów indeksu jak i logarytmicznych skumulowanych stóp zwrotu. Decyzję o wyborze zakresu czasowego podjęto – podobnie jak uprzednio – dążąc do skonfrontowania rezultatów uzyskanych przez Przekotę z wynikami otrzymanymi wskutek zastosowania metody Zwolankowskiej.

Wskazane szeregi czasowe są jednak szeregami o nieznanym rzeczywistym wymiarze fraktalnym. Celowe jest zatem potwierdzenie formułowanych wniosków przy wykorzystaniu szeregów czasowych o określonym teoretycznym wymiarze pudełkowym. W tym celu wykorzystano szeregi fraktalnego błędzenia przypadkowego, tj. opisywanego ułamkowego ruchu Browna. Ze względu na fakt, że w badaniach ekonomicznych spotyka się najczęściej szeregi persystentne, postanowiono zbadać wspomniane **szeregi dla wymiarów fraktalnych wynoszących: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5**. W analizach posłużono się szeregami o zróżnicowanej liczbie obserwacji: 1008, 2016, 3024, 3960, 4680, tj. o długościach zbliżonych do 1000, 2000, etc., mających możliwie jak najwięcej dzielników (tak by w przypadku stosowania metody podziału pola dysponować jak największą liczbą danych do skonstruowania linii regresji).

Wydaje się, że wnioski teoretyczne zostały w pełni potwierdzone przez wyniki przeprowadzonych badań. **Metoda podziału pola okazuje się systematycznie zaniżać poziom rzeczywistego wymiaru fraktalnego** dla najczęściej spotykanych szeregów o przeciętnym poziomie persystentności. Ponadto uzyskiwane za jej pomocą **oszacowania są zdecydowanie bardziej niestabilne** (cechują się istotnie większym odchyleniem standardowym) niż oszacowania otrzymane w wyniku zastosowania metody segmentowo-wariacyjnej. Jest to zjawisko tym bardziej niepokojące, że linie regresji były dopasowywane na podstawie relatywnie wielu punktów (znaczna liczba dzielników w każdym przypadku). Można przypuszczać, że dla liczby obserwacji o niewielu dzielnikach uzyskane wyniki mogłyby być jeszcze gorsze. Jest to jednocześnie kolejny argument przemawiający przeciw posługiwaniu się metodą podziału pola – **nie umożliwia ona analizowania szeregów o dowolnej długości**, w skrajnym przypadku bowiem, gdyby liczba obserwacji była liczbą pierwszą, linii regresji w ogóle nie dałoby się poprowadzić. Można temu zaradzić, odrzucając część obserwacji, jednak takie postępowanie rodzi dodatkowe problemy związane z malejącą zawartością informacyjną takiego szeregu i kłopotami z określeniem reguł przesądzających o tym, ile i które obserwacje należałoby odrzucić.

²¹⁹ Autor niniejszej monografii każdorazowo dokonywał powtórnego oszacowania wymiaru fraktalnego, konfrontując go z wynikami podawanymi przez Przekotę. Rezultaty cechowały się bardzo wysokim stopniem zgodności w odniesieniu do szeregów o 1000 obserwacjach (różnice rzędu 1–3%) oraz nieco mniejszym w przypadku szeregów o 100 obserwacjach (różnice rzędu 1–2%). Dla szeregów o 100 obserwacjach odnotowano jednak kilka przypadków, gdy oszacowania różniły się znacząco (ok. 10%). Przekota nie podał jednak z jakich danych korzystał (poza wskazaniem, że zostały one dostarczone przez Narodowy Bank Polski), zatem ewentualna weryfikacja uzyskanych przezeń wyników nie jest możliwa. Autor niniejszej monografii posłużył się dziennymi kursami średnimi NBP (http://www.nbp.pl/home.aspx?f=kursy/arch_a.html).

Ponadto empiryczny rozkład prawdopodobieństwa uzyskiwanych oszacowań w przypadku posiłkowania się metodą segmentowo-wariacyjną jest w przybliżeniu normalny, co potwierdzają przeprowadzone testy statystyczne. Z kolei dla oszacowań otrzymywanych z wykorzystaniem metody podziału pola hipotezę o normalności rozkładu należy odrzucić zdecydowanie częściej, a sam rozkład przypomina raczej rozkład zbliżony do trójkątnego czy jednostajnego, cechując się jednocześnie zdecydowanie większą dyspersją i mniejszym poziomem koncentracji (platykurtycznością).

Przedstawione konkluzje skłaniają do jednoznacznego **odrzuć metody podziału pola w jej obecnym kształcie na korzyść metody segmentowo-wariacyjnej**. W przypadku metody podziału pola większe jest prawdopodobieństwo popełnienia znaczącego błędu, dlatego też jej stosowanie nie jest rekomendowane przez autora niniejszej pracy²²⁰.

3.5. Konkluzje

W niniejszym rozdziale omówiono dwie najczęściej przywoływane w krajowej literaturze przedmiotu metody szacowania wymiaru fraktalnego szeregów czasowych – metodę segmentowo-wariacyjną i metodę podziału pola. Na podstawie przeprowadzonych analiz dotyczących danych empirycznych oraz uzyskanych w drodze symulacji można wywnioskować, że w obecnej postaci metody te nie mogą być uznawane za równorzędne. Metoda Zwolankowskiej okazała się dostarczać zdecydowanie bardziej wiarygodnych i stabilnych oszacowań wymiaru pudełkowego (choć oczywiście także obarczonych pewnymi błędami). Z kolei metoda zaproponowana przez Przekotę, atrakcyjna ze względu na prostotę przyświecającej jej idei oraz relatywnie niekomplikowane i mało czasochłonne obliczenia, w obecnej postaci zdaniem autora nie powinna być jednak wykorzystywana do szacowania wymiaru fraktalnego.

Przeciw stosowaniu wspomnianej metody przemawia przede wszystkim fakt, że odpowiedni estymator jest estymatorem obciążonym – systematycznie niedoszacowującym poziom rzeczywistego wymiaru Minkowskiego-Bouliganda. Po drugie, oszacowania uzyskiwane za pomocą metody podziału pola cechują się niewielkim stopniem stabilności – co sprawia, że nawet gdyby uznać obciążoność estymatora za nieistotną, to nadmierne (w stosunku do metody segmentowo-wariacyjnej) fluktuacje oszacowań skłaniają do odrzucenia tej metody. W obecnym kształcie może ona bowiem sugerować występowanie zmian analizowanego systemu ekonomicznego, które w rzeczywistości mają zdecydowanie łagodniejszy charakter bądź w ogóle nie występują, co może prowadzić do formułowania nieuzasadnionych wniosków²²¹.

Przedstawione rozważania natury teoretycznej, jak również towarzyszące im badania o charakterze empirycznym skłoniły autora do posiłkowania się wyłącznie metodą segmentowo-wariacyjną. Metoda ta zostanie wykorzystana w kolejnym, ostatnim rozdziale, gdzie autor postara się okazać, że sformułowane twierdzenie odnośnie do zasadności wykorzystania wymiaru fraktalnego w procesie oceny poziomu ryzyka inwestycji finansowych zwycięsko przechodzi próbę sfalsyfikowania go z wykorzystaniem danych empirycznych pochodzących z polskiego rynku akcji.

²²⁰ Dodatkowego potwierdzenia dla sformułowanych konkluzji dostarczają rezultaty badań opisanych w R. Buła: Analiza wymiaru fraktalnego spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie – aspekty metodyczne. „Nauki o Finansach”, nr 1/2017.

²²¹ Co też stało się udziałem twórcy metody podziału pola. Zob.: R. Buła: Metoda..., op. cit., s. 250–251.

Rozdział IV

Pomiar ryzyka inwestycji finansowych z wykorzystaniem wymiaru fraktalnego – badania empiryczne

Wymowniejsze od logiki są fakty.

M. Twain

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną wyniki badań odnoszących się do polskiego rynku akcji. Celem bezpośrednio przyświecającym ich przeprowadzeniu było **potwierdzenie na gruncie empirycznym głównej hipotezy badawczej – pokazanie, że wymiar fraktalny finansowych szeregów czasowych jest elementem istotnym dla poprawnej oceny ryzyka inwestycyjnego**. W tym celu, zgodnie z zaleceniami Poppera, autor podjął próbę sfalsyfikowania postawionej hipotezy badawczej w oparciu o dostępne dane. Gdyby w toku analiz okazało się, że użyteczność wymiaru fraktalnego jako miernika wspomagającego ocenę ryzykowności inwestycji jest nikła, wówczas teoria inwestycji wzbogaciłaby się o twierdzenie głoszące, że jego stosowanie do kwantyfikacji ryzyka nie umożliwia bardziej poprawnej oceny poziomu ryzyka. Stwierdzenie to, z punktu widzenia logiki równorzędne w sensie istotności przyjętej hipotezie badawczej, niesie jednak zdecydowanie mniej ważkie konsekwencje o charakterze nie tylko utylitarnym, lecz także naukowym. Podważałoby ono bowiem zasadność posiłkowania się aparatem teoretycznym powstałym w ramach teorii rynku fraktalnego. Co więcej, w zamian za praktycznie sfalsyfikowany w klasycznej postaci model Samuelsona-Osborne’a nie proponowałoby żadnych nowych rozwiązań w zakresie pomiaru ryzykowności inwestycji. Powyższe względy – a także wstępne badania prowadzone przez autora – przyczyniły się do sformułowania głównej hipotezy badawczej w przedstawionej postaci oraz do wyrażenia przekonania, że nie zostanie ona obalona, lecz potwierdzona (w popperowskim rozumieniu tego terminu)²²².

²²² Należy tu zauważyć, że popperowskie „potwierdzenie” czy też „koroboracja” jest czymś zgoła odmiennym niż „pozytywna weryfikacja”.

4.1. Charakterystyka przedmiotu badań

Ze względu na ograniczone ramy niniejszej pracy oraz fakt, że w rozważaniach teoretycznych odnoszono się przede wszystkim do rynku akcji, postanowiono przeanalizować ceny akcji notowanych na warszawskiej giełdzie papierów wartościowych. Jako że podane kryterium ogólne spełnia ogromna liczba walorów, konieczne było posłużenie się dodatkowymi warunkami, ograniczającymi liczebność badanej próby, a jednocześnie niewpływającymi istotnie na proces wnioskowania. Z tego powodu autor podjął decyzję o przeanalizowaniu cen akcji **spółek wchodzących w skład trzech głównych indeksów publikowanych przez Giełdę Papierów Wartościowych w Warszawie S.A.: Warszawskiego Indeksu Giełdowego Dużych Spółek WIG20, Warszawskiego Indeksu Giełdowego Średnich Spółek mWIG40 oraz Warszawskiego Indeksu Giełdowego Małych Spółek sWIG80**. Zdaniem autora metodyka kwalifikowania spółek do indeksów zapewnia taki stopień reprezentatywności próby, który umożliwia zachowanie wspomnianych uprzednio warunków.

Portfele wzmiankowanych indeksów są tworzone na podstawie rankingu budowanego po ostatniej sesji stycznia, kwietnia, lipca i października²²³. Ranking spółek jest sporządzany z uwzględnieniem procentowego udziału w łącznych obrotach oraz procentowego udziału w łącznej wartości akcji w wolnym obrocie wszystkich spółek branż pod uwagę. Tworząc ranking, oblicza się tzw. punkty rankingowe w myśl wzoru:

$$R(i) = 0,6 \cdot sT(i) + 0,4 \cdot sC(i),$$

gdzie:

$R(i)$ – punkty rankingowe i -tej spółki,

$sT(i)$ – udział procentowy obrotu akcjami i -tej spółki w łącznych obrotach akcjami wszystkich spółek uwzględnianych w rankingu,

$sC(i)$ – udział procentowy wartości akcji w wolnym obrocie i -tej spółki w wartości akcji w wolnym obrocie wszystkich spółek uwzględnianych w rankingu.

Na tej podstawie dobiera się spółki do indeksów (spółka rankingowa może zostać zakwalifikowana do co najwyżej jednego z nich)²²⁴. I tak, w skład indeksu WIG20 wchodzi docelowo 20 spółek, zajmujących najwyższe miejsca w rankingu, z uwzględnieniem specyficznych korekt zapobiegających nadmiernej koncentracji spółek jednego sektora²²⁵. Z kolei do indeksu mWIG40 zostają zakwalifikowane spółki (docelowo 40) nietworzące indeksu WIG20 (z wyłączeniem określonych, zbyt dużych spółek zagranicznych). W skład indeksu małych spółek sWIG80 wchodzi natomiast spółki, które nie zostały uwzględnione w konstrukcji indeksów WIG20 oraz mWIG40 (za wyjątkiem określonych, zbyt dużych spółek zagranicznych, przy czym stosowne warunki dla indeksu sWIG80 są zdecydowanie bardziej restrykcyjne niż dla indeksu mWIG40) – w liczbie

²²³ Za: Szczegółowe zasady konstrukcji i podawania do publicznej wiadomości indeksów i subindeksów giełdowych. Załącznik do Uchwały Nr 1224/2014 Zarządu Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. z dnia 31 października 2014 r. http://www.google.pl/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CC0QFjACahUKEwjIncPz_4rGAhXKsxQKHT7xAGM&url=http%3A%2F%2Fwww.gpw.pl%2Fpub%2Ffiles%2FDOC%2Fregulacje%2F1224_2014.doc&ei=pUF7VYi3I8mUr7ig5gG&usq=AFQjCNHhVZzNBRFvWX1vL4pBg iwF7hgypg&bvm=bv.95515949,d.d24&cad=rja.

²²⁴ Warunkiem koniecznym zaliczenia do jakiegokolwiek indeksu jest, by liczba akcji spółki w wolnym obrocie stanowiła więcej niż 10%, a ich wartość była większa niż 1 mln euro. Ponadto spółki takie nie mogą być oznaczone w sposób szczególny ani ich akcje nie mogą być zakwalifikowane do segmentu LISTA ALERTÓW lub Strefy Niższej Płynności (ibid.).

²²⁵ Liczba spółek tego samego sektora wchodzących w skład indeksu nie powinna być większa niż 5 (z uwzględnieniem zapisów §11 ust. 4 odnośnej uchwały, ibid.).

docelowo 80. Zdaniem autora opisywana metodyka doboru spółek do indeksów, uwzględniająca wartość obrotów akcjami danego podmiotu oraz ich dostępność, sprawia, że notowania zakwalifikowanych spółek można uznać za właściwie odzwierciedlające dany segment rynku, a jednocześnie cechujące się pożądanymi własnościami z punktu widzenia analitycznego.

Opisywane uwarunkowania sprawiły, że w pracy postanowiono zbadać kwotowania cen akcji wybranych **spółek wchodzących w skład wspomnianych indeksów w dniu 30 kwietnia 2015 r.** (tj. po rewizji rocznej mającej miejsce w dniu 20 marca 2015 r.). Ze względu na konieczność dysponowania odpowiednią liczbą obserwacji wykorzystano **notowania dzienne**. Jako że sesje na warszawskim parkiecie odbywają się we wszystkie dni robocze od 3 października 1994 r., nie posiłkowano się danymi odnoszącymi się do okresów wcześniejszych.

Tab. 7. Spółki zakwalifikowane do indeksu WIG20 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
ACP	ASSECOPOL	1998-06-02	2015-04-30	4236
ALR	ALIOR	2012-12-14	2015-04-30	586
BZW	BZWBK	1994-10-03	2015-04-30	5137
CPS	CYFRPLSAT	2008-05-06	2015-04-30	1749
ENA	ENEA	2008-11-17	2015-04-30	1613
ENG	ENERGA	2013-12-11	2015-04-30	342
EUR	EUROCASH	2005-02-04	2015-04-30	2558
KGH	KGHM	1997-07-10	2015-04-30	4458
LPP	LPP	2001-05-16	2015-04-30	3429
LWB	BOGDANKA	2009-06-25	2015-04-30	1464
MBK	MBANK	1994-10-03	2015-04-30	5144
OPL	ORANGEPL	1998-11-18	2015-04-30	4119
PEO	PEKAO	1998-06-30	2015-04-30	4219
PGE	PGE	2009-11-06	2015-04-30	1368
PGN	PGNIG	2005-09-23	2015-04-30	2402
PKN	PKNORLEN	1999-11-26	2015-04-30	3863
PKO	PKOBP	2004-11-10	2015-04-30	2622
PZU	PZU	2010-05-12	2015-04-30	1242
SNS	SYNTHOS	2004-12-20	2015-04-30	2595
TPE	TAURONPE	2010-06-30	2015-04-30	1208

Objaśnienia: Wyróżniono spółki poddane dalszym analizom.

Źródło: Komunikat Zarządu Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. z dnia 12 lutego 2015 roku. http://static.gpw.pl/pub/files/PDF/2015_02_12_3_Portfele_WIG20_mWIG40_sWIG80_WIG30_0315.pdf.

Tab. 8. Spółki zakwalifikowane do indeksu mWIG40 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
AMC	AMICA	1997-09-08	2015-04-30	4413
APT	APATOR	1997-04-24	2015-04-30	4488
ATT	GRUPAAZOTY	2008-06-30	2015-04-30	1711
BDX	BUDIMEX	1995-05-25	2015-04-30	4987
BHW	HANDLOWY	1997-06-30	2015-04-30	4464
BRS	BORYSZEW	1996-05-20	2015-04-30	4702
CAR	INTERCARS	2004-05-26	2015-04-30	2699
CCC	CCC	2004-12-02	2015-04-30	2589
CDR	CDPROJEKT	1994-10-03	2015-04-30	5105
CIE	CIECH	2005-02-10	2015-04-30	2557
EAT	AMREST	2005-04-27	2015-04-30	2503
ECH	ECHO	1996-03-05	2015-04-30	4770
EMP	EMPERIA	2002-01-03	2015-04-30	3245
FTE	FORTE	1996-07-24	2015-04-30	4681
GCH	GLOBCITYHD	2006-12-08	2015-04-30	2037
GNB	GETINOBLE	2007-05-30	2015-04-30	1981
GPW	GPW	2010-11-09	2015-04-30	1115
GTC	GTC	2004-05-06	2015-04-30	2753
GTN	GETIN	2001-05-10	2015-04-30	3492
HWE	HAWE	2007-02-14	2015-04-30	2052
ING	INGBSK	1994-10-03	2015-04-30	5146
ITG	INTEGERPL	2007-10-30	2015-04-30	1872
JSW	JSW	2011-07-06	2015-04-30	951
KER	KERNEL	2007-11-23	2015-04-30	1856
KRU	KRUK	2011-05-10	2015-04-30	991
KTY	KETY	1996-01-30	2015-04-30	4810
LTS	LOTOS	2005-06-09	2015-04-30	2477
MDG	MEDICALG	2011-11-09	2015-04-30	844

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
MIL	MILLENNIUM	1994-10-03	2015-04-30	5134
NET	NETIA	1999-07-29	2015-04-30	3947
NEU	NEUCA	2004-09-30	2015-04-30	2602
NWG	NEWAG	2013-12-05	2015-04-30	346
ORB	ORBIS	1997-11-20	2015-04-30	4358
PKP	PKPCARGO	2013-10-30	2015-04-30	370
SNK	SANOK	1997-01-16	2015-04-30	4445
STP	STALPROD	1997-08-06	2015-04-30	4340
TRK	TRAKCJA	2008-04-01	2015-04-30	1762
TVN	TVN	2004-12-07	2015-04-30	2604
WWL	WAWEL	1998-03-11	2015-04-30	4127
ZEP	ZEPAK	2012-10-30	2015-04-30	618

Objaśnienia: Wyróżniono spółki poddane dalszym analizom.

Źródło: Komunikat Zarządu Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. z dnia 12 lutego 2015 roku. http://static.gpw.pl/pub/files/PDF/2015_02_12_3_Portfele_WIG20_mWIG40_sWIG80_WIG30_0315.pdf.

Tab. 9. Spółki zakwalifikowane do indeksu sWIG80 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
ABC	ABCDATA	2010-06-17	2015-04-30	1217
ABE	ABPL	2006-09-21	2015-04-30	2054
ABS	ASSECOBS	2007-11-19	2015-04-30	1785
ACE	ACE	2007-06-01	2015-04-30	1951
ACG	ACAUTOGAZ	2011-08-11	2015-04-29	817
ACT	ACTION	2006-07-24	2015-04-30	2189
AGO	AGORA	1999-04-20	2015-04-30	4015
AGT	AGROTON	2010-11-08	2015-04-30	1115
ALC	ALCHEMIA	1998-05-19	2015-04-30	3786
ALI	ALTUSTFI	2014-07-11	2015-04-30	200

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
AML	ALUMETAL	2014-07-17	2015-04-30	195
ASB	ASBIS	2007-10-30	2015-04-30	1790
AST	ASTARTA	2006-08-17	2015-04-30	2172
ATC	ARCTIC	2009-10-23	2015-04-30	1367
ATM	ATM	2004-09-28	2015-04-29	2623
BFT	BENEFIT	2011-04-21	2015-04-30	888
BIO	BIOTON	2005-03-16	2015-04-30	2523
BOS	BOS	1997-02-03	2015-04-30	3868
BPH	BANKBPH	1995-02-07	2015-04-30	5058
BTM	BYTOM	1995-01-05	2015-04-30	4955
CIG	CIGAMES	2007-11-30	2015-04-30	1850
CMP	COMP	2005-01-14	2015-04-30	2554
CMR	COMARCH	1999-03-10	2015-04-30	4039
COL	COLIAN	1995-05-17	2015-04-30	4980
CRM	CORMAY	2008-08-20	2015-04-30	1639
DBC	DEBICA	1994-11-24	2015-04-30	5089
DOM	DOMDEV	2006-10-24	2015-04-30	2129
DUD	DUDA	2002-12-23	2015-04-30	3083
DUO	DUON	2007-10-10	2015-04-30	1883
EEX	EKOEXPORT	2009-07-16	2015-04-30	1449
ELB	ELBUDOWA	1996-02-09	2015-04-30	4679
EMT	ELEMENTAL	2012-07-12	2015-04-30	684
FCL	FARMACOL	1999-04-23	2015-04-30	3871
FMF	FAMUR	2006-08-04	2015-04-30	2184
FRO	FERRO	2010-04-14	2015-04-30	1212
GCN	GROCLIN	1998-11-24	2015-04-30	4020
GRI	GINROSSI	2006-06-26	2015-04-30	2210
GRJ	GRAJEWO	1997-05-06	2015-04-30	4260

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
IFR	IFSA	2007-05-28	2015-04-30	1589
IPX	IMPEXMET	1997-06-24	2015-04-30	4441
KAN	KANIA	2008-12-22	2015-04-30	1587
KFL	KOFOLA	2003-02-27	2015-04-30	2867
KGN	KOGENERA	2000-05-26	2015-04-30	3703
KPX	KOPEX	1998-06-04	2015-04-30	4182
KRI	KREDYTIN	2007-06-11	2015-04-30	1966
KRS	KERDOS	2004-06-07	2015-04-30	2714
KSW	KRUSZWICA	1997-01-03	2015-04-30	4545
LBW	LUBAWA	1996-11-18	2015-04-30	4493
LCC	LCCORP	2007-06-29	2015-04-30	1960
LTX	LENTEX	1997-05-08	2015-04-30	4470
MAB	MABION	2010-08-10	2015-04-30	1155
MAG	MAGELLAN	2007-10-01	2015-04-30	1800
MCI	MCI	2001-02-01	2015-04-30	3567
MDS	MIDAS	1997-06-12	2015-04-30	4470
MNC	MENNICA	1998-04-02	2015-04-30	4103
MON	MONNARI	2006-12-20	2015-04-30	2086
MSX	MSXRESOUR	1994-10-03	2015-04-30	5107
MSZ	MOSTALZAB	1994-10-05	2015-04-30	5144
PCE	POLICE	2005-07-14	2015-04-30	2451
PCM	PCM	2014-04-16	2015-04-30	231
PEL	PELION	1998-02-17	2015-04-30	4299
PEP	PEP	2005-05-13	2015-04-30	2488
PGD	PAGED	1996-10-10	2015-04-30	4487
PHN	PHN	2013-02-13	2015-04-30	548
PND	POLNORD	1998-12-18	2015-04-30	4026
PUE	ZPUE	1999-08-03	2015-04-30	3504

Skrót	Spółka	Okres notowań		Liczba obserwacji
		Data początkowa	Data końcowa	
QRS	QUERCUS	2008-09-11	2015-04-30	1633
RBW	RAINBOW	2007-10-09	2015-04-30	1858
RDL	RADPOL	2007-05-10	2015-04-30	1995
RFK	RAFAKO	1994-10-03	2015-04-30	5127
ROB	ROBYG	2010-11-03	2015-04-30	1106
SEN	SERINUS	2010-05-25	2015-04-30	1220
SGN	SYGNITY	1995-10-27	2015-04-30	4880
SKA	SNIEZKA	2003-12-29	2015-04-30	2742
SMT	SMT	2007-10-09	2015-04-30	1684
STX	STALEXP	1994-10-26	2015-04-30	5130
VST	VISTULA	1994-10-03	2015-04-30	5141
WSE	WORKSERV	2012-04-26	2015-04-30	747
ZKA	ZETKAMA	2005-03-04	2015-04-30	2481
ZMT	ZAMET	2011-10-10	2015-04-30	874

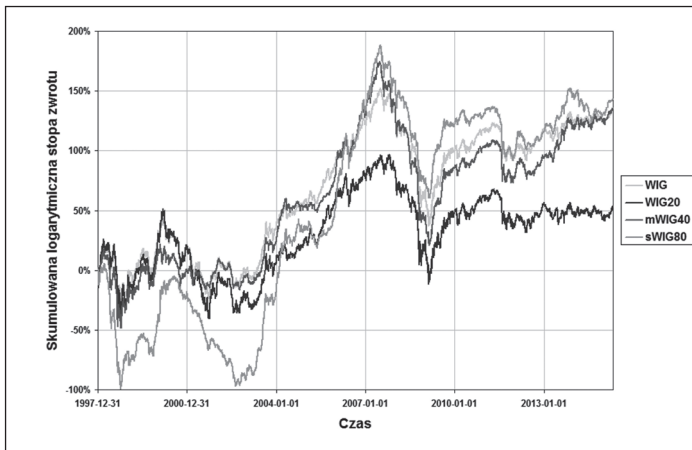
Objaśnienia: Wyróżniono spółki poddane dalszym analizom.

Źródło: Komunikat Zarządu Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. z dnia 12 lutego 2015 roku. http://static.gpw.pl/pub/files/PDF/2015_02_12_3_Portfele_WIG20_mWIG40_sWIG80_WIG30_0315.pdf.

Niektóre spółki wchodzące w skład wspomnianych indeksów były jednak notowane na giełdzie zbyt krótko, by możliwe było badanie dostatecznie długich szeregów. Przyjęto zatem, że szeregi krótsze niż odpowiadające okresowi pięcioletniemu (tj. o liczbie obserwacji mniejszej niż 1251) nie powinny być przedmiotem analiz²²⁶. Ostatecznie spośród spółek tworzących indeks WIG20 wyeliminowano 4, spośród tworzących indeks mWIG40 – 7, zaś spośród tworzących indeks sWIG80 – 15.

W celu uzyskania sumarycznego obrazu zachowań cen akcji „przeciętnej spółki” wchodzącej w skład każdego z indeksów autor zdecydował także o **badaniu fluktuacji poszczególnych indeksów: Warszawskiego Indeksu Giełdowego Dużych Spółek WIG20, Warszawskiego Indeksu Giełdowego Średnich Spółek mWIG40, Warszawskiego Indeksu Giełdowego Małych Spółek sWIG80**, a ponadto (dla otrzymania materiału do porównań) **Warszawskiego Indeksu Giełdowego WIG**. Co prawda indeks WIG (w przeciwieństwie do poprzednio wymienionych) jest indeksem dochodowym, a nie cenowym, nie wydaje się jednak, by fakt ten mógł istotnie wpłynąć na otrzymywane rezultaty.

²²⁶ Liczba obserwacji ustalona w oparciu o historyczną liczbę dni transakcyjnych w pięcioleciu.



Rys. 38. Logarymiczna skumulowana stopa zwrotu z indeksów WIG, WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 31.12.1997–30.04.2015 r.²²⁷

Źródło: Opracowanie własne w oparciu o dane serwisu stoq.pl.

Wśród problemów natury metodycznej związanych z prowadzonymi badaniami istotna jest kwestia, czy analizom poddać ceny i zmiany cen akcji (względnie poziomy i zmiany poziomów indeksów), czy też skumulowane i jednookresowe stopy zwrotu. Prowadzone w rozdziale drugim rozważania skłaniają do wykorzystania stóp zwrotu. Ponadto znaczenie i ekonomiczna interpretacja wskazują, że bardziej celowe jest oparcie obliczeń na względnych miarach efektywności inwestycji. Z tego też powodu w niniejszej pracy posłużono się stopami zwrotu.

Przystępując do obliczeń należało także rozstrzygnąć kwestię, jaki rodzaj stóp zwrotu wykorzystać. Postanowiono posłużyć się **logarymicznymi stopami zwrotu**. Wybór ów jest podyktowany ich podstawową zaletą – a mianowicie addytywnością. Co więcej, logarymiczna stopa zwrotu przyjmuje wartości z zakresu $(-\infty, +\infty)$, co ułatwia jej modelowanie z wykorzystaniem rozkładów, w przypadku których dziedziną funkcji gęstości jest zbiór liczb rzeczywistych. Co prawda stwierdzenie, że stopa zwrotu jest niższa niż -100% (a taka sytuacja w odniesieniu do logarymicznych stóp zwrotu może mieć miejsce) nie wydaje się poprawne (powszechnie używana prosta stopa zwrotu jest albowiem zawsze większa lub w ostateczności równa -100%). W tym przypadku korzyści z użycia logarymicznych stóp zwrotu przeważają nad niedogodnościami. Stopy logarymiczne cechują się jednak dwiema istotnymi wadami, a mianowicie dla portfela instrumentów finansowych prosta stopa zwrotu jest średnią ważoną prostych stóp zwrotu z poszczególnych składowych. Dla stóp logarymicznych relacja ta nie zachodzi. Co więcej, jeżeli wykorzystywać prostą stopę zwrotu, to wzrost ceny instrumentu o $2x$ jednostek pieniężnych będzie skutkował dwukrotnie wyższą stopą zwrotu, niż w przypadku wzrostu ceny o x jednostek pieniężnych, co dla stóp logarymicznych jest nieprawdą. Jako że dla niewielkich zmian cen (a z takimi mamy do czynienia w niniejszej monografii) logarymiczna i prosta stopa zwrotu są praktycznie równe, wady te nie wydają się być istotne.

Problematyczna była także decyzja, czy posługiwać się nominalnymi czy też realnymi stopami zwrotu z inwestycji. Wydawałoby się być może, że lepszym rozwiązaniem jest wykorzystanie stóp realnych, pomijających wpływ zjawisk inflacyjnych na poziom rentowności inwestycji. Tym niemniej zdecydowano o użyciu stóp nominalnych. Wybór ten był podyktowany przede wszystkim dostępnością danych – publikowane informacje statystyczne odnoszą się co najwyżej do miesięcznych zmian poziomu cen, co oznaczałoby konieczność szacowania dziennych stóp inflacji dokonując interpolacji. Podejście to nie zostało wykorzystane przez autora, zwłaszcza że relatywnie

²²⁷ Dla porównywalności danych za datę początkową obrano 31 grudnia 1997 r., tj. najpóźniejszą z dat bazowych analizowanych indeksów.

niewielkie zmiany poziomu cen w badanym okresie nie znajdują istotnego odzwierciedlenia w stopach dziennych. Z tego powodu w pracy posłużono się **stopami nominalnymi**.

Wykorzystane szeregi czasowe cen zamknięcia zostały udostępnione przez serwis stooq.pl. Należy jednak zwrócić uwagę na **metodykę dostosowywania cen historycznych** przezeń stosowaną. Każdorazowa wypłata pożytków z akcji (najczęściej w postaci dywidend) powoduje, że rynkowe ceny akcji są obniżane o określoną kwotę, a zatem posiłkowanie się wyłącznie nimi prowadziło do zafałszowania rzeczywistego poziomu osiągniętych stóp zwrotu. Dlatego też w takiej sytuacji ceny akcji są dostosowywane wstecz, by właściwie odzwierciedlać zyskowność inwestycji. W tym celu kalkulowany jest odpowiedni dzielnik:

$$d = \frac{S}{S - D},$$

gdzie:

d – dzielnik,

S – cena akcji na ostatniej sesji z uwzględnieniem wypłacanych pożytków,

D – wypłacane pożytki z akcji.

Następnie wszystkie notowania sprzed dostosowania cen akcji są dzielone z wykorzystaniem obliczonej wielkości. Skutkiem przeprowadzenia tego zabiegu jest otrzymanie szeregów wartości poprawnie odzwierciedlających zyskowność inwestycji w akcje.

W dalszej części zostaną przedstawione szczegółowe wyniki analiz odnoszących się do zakreślonego przedmiotu badań. Wszelkie kalkulacje prowadzono wykorzystując program **MS Excel** oraz język programowania **Visual Basic for Applications**.

4.2. Procedura i wyniki badań

4.2.1. Analiza wybranych podstawowych własności statystycznych

W pierwszej kolejności dla wskazanych spółek skalkulowano logarytmiczne oraz skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu. Na ich podstawie obliczono **główne charakterystyki statystyczne oraz klasyczne miary ryzyka**: odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne, semiodchylenie standardowe, semiodchylenie przeciętne, odchylenie ćwiartkowe oraz wartość zagrożoną dla prawdopodobieństwa wynoszącego 0,1. Miary te wybrano spośród klasycznych miar ryzyka jako najczęściej wykorzystywane zarówno w ujęciu teoretycznym w ramach obowiązującego dotychczas paradygmatu jak też w zastosowaniach praktycznych. Oszacowane wielkości posłużyły do weryfikacji, czy właściwym modelem opisującym zachowanie cen i stóp zwrotu może być przedstawiony uprzednio model Samuelsona-Osborne'a. W tym celu sformułowano hipotezę zerową postaci:

$$H_0: \ln S_t - \ln S_{t-1} \sim \text{NIID}(\mu, \sigma)$$

przy hipotezie alternatywnej:

H_1 : Logarytmiczne stopy zwrotu nie są opisane rozkładem normalnym, bądź nie są zmiennymi losowymi niezależnymi o identycznych rozkładach.

Z względu na dysponowanie szeregami czasowymi o znacznej liczbie obserwacji postanowiono weryfikując hipotezę zerową wykorzystać test oparty na momentach empirycznych rozkładu – na trzecim i czwartym momencie centralnym – **test typu omnibus**, nazywany najczęściej testem **Jarque-Bera**. Uzyskane wartości skłaniają do odrzucenia hipotezy zerowej we wszystkich analizowanych przypadkach – zarówno dla akcji jak i czterech indeksów giełdowych. Należy przy tym

zauważyć, że bardzo wysokie wartości statystyki testowej umożliwiają z praktyczną pewnością odejście od modelu Samuelsona-Osborne’a.

Trzeba odnotować, że wyniki testu Jarque-Bera nie zmuszają do wyciągnięcia wniosku, że rozkład stóp zwrotu nie jest rozkładem gaussowskim. Inną przyczyną uzyskania opisywanych rezultatów może być fakt, że stopy zwrotu nie są zmiennymi losowymi niezależnymi, bądź że nie mają identycznego rozkładu. W tej sytuacji postanowiono także zbadać, czy stopy zwrotu można uznać za cechujące się niezależnością. W tym celu wykorzystano test losowości – **test medianowy** oraz dwa testy oparte na oszacowanych współczynnikach autokorelacji – **test Boxa-Pierce’a** oraz **Boxa-Ljunga**. W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę, że choć potencjalną przyczyną dla odrzucenia hipotez zerowych omawianych testów może być brak identyczności rozkładów badanych zmiennych losowych, to jednak ze względu na fakt, iż taka sytuacja praktycznie uniemożliwia (a co najmniej ogromnie utrudnia) prowadzenie dalszych analiz, najczęściej przyjmuje się, że czynnikiem skutkującym nieprzyjęciem hipotez zerowych jest występowanie zależności pomiędzy rozpatrywanymi zmiennymi losowymi. Tak też postąpiono w niniejszej pracy.

Hipotezę o niewystępowaniu zależności liniowych ani nieliniowych przyjęto zaledwie w 15 przypadkach (ok. 13% badanej populacji akcji). Relatywnie większa częstość akceptowania hipotezy zerowej dotyczy spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 (31%), zaś najmniejsza – indeksu sWIG80 (8%). Co więcej, także dla badanych indeksów hipotezę ową należy zdecydowanie odrzucić. Uzyskane rezultaty wskazują zatem na występowanie w większości przypadków zależności pomiędzy stopami zwrotu. W tej sytuacji przydatność klasycznych miar ryzyka staje się wątpliwa, bowiem wobec obalenia założenia o niezależności i identyczności rozkładów zmiennych losowych reprezentujących stopy zwrotu ich wartość poznawcza zdecydowanie maleje. Potencjalna niepoprawność szeroko wykorzystywanej formuły wiążącej odchylenia standardowe stóp zwrotu dla okresów o różnej długości (reguły „pierwiastka kwadratowego z czasu”) sprawia, że przewidywanie poziomu zmienności staje się problematyczne, a możliwość predykcji na podstawie uzyskanych wielkości – wątpliwa.

Przed przystąpieniem do analiz z wykorzystaniem wymiaru fraktalnego autor postanowił zbadać stacjonarność procesów logarytmicznych stóp zwrotu. W celu określenia, czy można je uznać za słabo stacjonarne²²⁸, wykorzystano **test Kwiatkowskiego, Philipasa, Schmidta i Shina**.

Tab. 10. Charakterystyki logarytmicznych stóp zwrotu z wybranych indeksów wraz z wynikami testów statystycznych

Wielkość	Indeks			
	WIG	WIG20	mWIG40	sWIG80
T	5146	5146	4339	5087
μ	0,03%	0,02%	0,03%	0,05%
Me	0,05%	0,01%	0,07%	0,11%
σ	1,51%	1,77%	1,24%	1,45%
d	1,07%	1,27%	0,86%	0,98%
$s\sigma$	1,09%	1,26%	0,93%	1,07%

²²⁸ Tj. o niezmienniej w czasie nadziei matematycznej i wariancji oraz funkcji kowariancyjnej uzależnionej jedynie od długości okresu dzielącego badane zmienne losowe.

Wielkość	Indeks			
	WIG	WIG20	mWIG40	sWIG80
sd	0,53%	0,63%	0,43%	0,49%
Q	0,76%	0,90%	0,60%	0,64%
VaR _{0,1}	1,65%	1,95%	1,29%	1,46%
γ_1	-0,22	-0,14	-0,71	-0,36
γ_2+3	6,64	6,94	8,75	8,84
dim _B (X)	1,4437	1,4852	1,4024	1,4046
Wyniki testów statystycznych				
Test Jarque-Bera				
JB	2875,84	3343,58	6332,39	7352,50
p-value	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Test Boxa-Pierce'a i Boxa-Ljunga				
Q _m	114,77	51,37	172,34	227,98
p-value	0,0000	0,0014	0,0000	0,0000
Q' _m	114,90	51,50	172,65	228,36
p-value	0,0000	0,0014	0,0000	0,0000
Test medianowy				
K	2,01	0,00	6,74	10,46
p-value	0,0447	1,0000	0,0000	0,0000
Test Kwiatkowskiego, Philipsa, Schmidta i Shina				
η_{μ}	0,05	0,06	0,11	0,17

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej danego testu na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Przeprowadzone w myśl opisywanych zaleceń badanie stacjonarności procesu logarymicznych stóp zwrotu jedynie w 19 przypadkach (tj. ok. 8%) doprowadziło do uzyskania wyniku wskazującego na niestacjonarność. Wydaje się zatem uzasadnione przyjęcie, że w odniesieniu do praktycznie wszystkich badanych akcji, a także czterech wspomnianych indeksów proces logarymicznych stóp zwrotu jest procesem charakteryzującym się słabą stacjonarnością. Jest to stwierdzenie o tyle istotne, że umożliwia sformułowanie wniosku, iż charakter badanych procesów nie ulegał zmianom wraz z upływem czasu, a co za tym idzie – skalkulowane mierniki można traktować jako opisujące analizowane wielkości w całym rozpatrywanym okresie.

4.2.2. Analiza wymiaru fraktalnego w świetle przynależności do indeksu giełdowego

Uznawszy, że w świetle przeprowadzonych testów statystycznych można przyjąć, iż logarytmiczne stopy zwrotu nie są zmiennymi losowymi niezależnymi, cechując się jednakże słabą stacjonarnością, przystąpiono do analizy wykorzystującej wymiar fraktalny jako potencjalną miarę ryzykowności inwestycji. Dla każdej ze spółek oraz czterech indeksów giełdowych oszacowano poziom **wymiaru pudełkowego**, posługując się przedstawioną w poprzednim rozdziale **metodą segmentowo-wariacyjną**.

Tab. 11. Oszacowany wymiar fraktalny indeksów WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80 na podstawie skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów oraz komponentów indeksów

Wielkość	WIG	WIG20	mWIG40	sWIG80	WIG20, mWIG40, sWIG80
Oszacowany wymiar fraktalny					
Dla indeksu					
Wymiar	1,4437	1,4852	1,4024	1,4046	–
Dla komponentów indeksu z uwzględnieniem równych wag					
Średnia	–	1,4561	1,4154	1,4171	1,4221
Mediana	–	1,4723	1,4164	1,4126	1,4192
σ	–	0,0732	0,0487	0,0452	0,0523
Q	–	0,0298	0,0324	0,0320	0,0364
Dla komponentów indeksu z uwzględnieniem wag indeksowych					
Średnia	–	1,4688	1,4218	1,4245	–
Mediana	–	1,4748	1,4306	1,4201	–
σ	–	0,0619	0,0475	0,0424	–
Q	–	0,0195	0,0325	0,0327	–
Test zgodności empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa oszacowanych wymiarów fraktalnych z rozkładem normalnym					
χ^2	–	15,65	7,56	4,64	6,57
p-value	–	0,1546	0,7521	0,9473	0,8328

Źródło: Opracowanie własne.

Analizując relacje pomiędzy oszacowanymi wymiarami fraktalnymi, należy stwierdzić, że **uzyskane rezultaty są spójne z interpretacjami natury *stricte* ekonomicznej**. Najwyższym poziomem wymiaru fraktalnego cechuje się indeks dużych spółek WIG20. Mając na uwadze metodykę doboru spółek do indeksu – a mianowicie spółek o możliwie najwyższej relatywnej wartości

obrotów oraz wartości akcji w wolnym obrocie – można określić tę sytuację jako całkowicie zgodną z konkluzjami zawartymi w rozdziale drugim. Rynek akcji tych spółek, jako cechujący się największym stopniem płynności, jest najbardziej ryzykowny dla krótkich horyzontów inwestycyjnych, ponieważ koncentrująca się na nim uwaga inwestorów sprawia, że zmiany cen instrumentów są bardzo częste. Dla okresów długich przeważnie relatywnie stabilna kondycja ekonomiczna przedsiębiorstw oraz mnogość zaangażowanych dostawców kapitału o zróżnicowanych długościach horyzontów inwestycyjnych sprawia, że wszelkie napływające informacje nie mają tak silnie jednokierunkowego wpływu na kursy akcji, jak np. w odniesieniu do spółek małych i średnich.

Najniższym wymiarem fraktalnym cechują się indeksy średnich i małych spółek (były one praktycznie równe dla wzmiankowanych indeksów). Również ta konstatacja znajduje ekonomiczne uzasadnienie w świetle dotychczas sformułowanych wniosków w części teoriopoznawczej. Względnie mniejsze zainteresowanie inwestorów akcjami spółek z tych segmentów sprawia, że w krótkich okresach zmiany cen są relatywnie rzadkie (na co wskazuje rys. 59). Jednakowoż dla wydłużających się horyzontów inwestycyjnych ryzyko zmiany ceny przyrasta zdecydowanie szybciej niż dla spółek dużych. Oddziałuje na to fakt, że w przypadku napływu istotnych informacji dotyczących spółki, wobec niewielkiej liczebności inwestorów o zróżnicowanych długościach horyzontów inwestycyjnych, może ona w istotny sposób wpłynąć na rynkową wycenę akcji, przyczyniając się do wystąpienia silnej zwyżki lub zniżki kursów (rys. 58). Co więcej, spółki średnie i małe często cechują się mniejszą stabilnością oraz relatywnie gorszą kondycją ekonomiczną, co sprawia, że długoterminowe inwestowanie w ich akcje wiąże się z większym ryzykiem niż w przypadku przedsiębiorstw dużych.

Oszacowany wymiar fraktalny Warszawskiego Indeksu Giełdowego stanowi w przybliżeniu średnią arytmetyczną estymowanego najmniejszego oraz największego wymiaru fraktalnego (wśród indeksów). Poziom ryzyka związany z inwestowaniem w przeciętną spółkę wchodzącą w skład tego indeksu musi być zatem większy od ryzyka inwestowania w spółki duże, a jednocześnie mniejszy od ryzyka związanego z lokowaniem środków w akcjach spółek małych i średnich (rozpatrując ryzykowność inwestycji w ujęciu długoterminowym).

Wnioski analogiczne do powyżej sformułowanych można wyciągnąć w oparciu o parametry opisujące rozkład oszacowanych wymiarów fraktalnych akcji poszczególnych spółek, pogrupowanych według kryterium zakwalifikowania do danego indeksu. Pewne różnice pomiędzy rezultatami uzyskanymi na podstawie analizy stóp zwrotu z indeksów a wynikami otrzymanymi na podstawie charakterystyk spółek wynikają częściowo z faktu, że w badaniu spółek niektórych podmiotów ze względu na szczupłość dostępnych danych nie uwzględniano, a są one brane pod uwagę przy obliczaniu poziomów indeksów. Miary klasyczne i pozycyjne wyliczone przy założeniu równego udziału poszczególnych instrumentów, jak i przy zastosowaniu średniej ważonej z wykorzystaniem wag indeksowych pozwalają w pełni potwierdzić dotychczasowe wnioski dotyczące ryzykowności inwestycji. W szczególności warto zwrócić uwagę na mediany estymowanych wymiarów fraktalnych, które niezależnie od obioru wag spełniają zależność:

$$Me_{WIG20} > Me_{mWIG40} > Me_{sWIG80}.$$

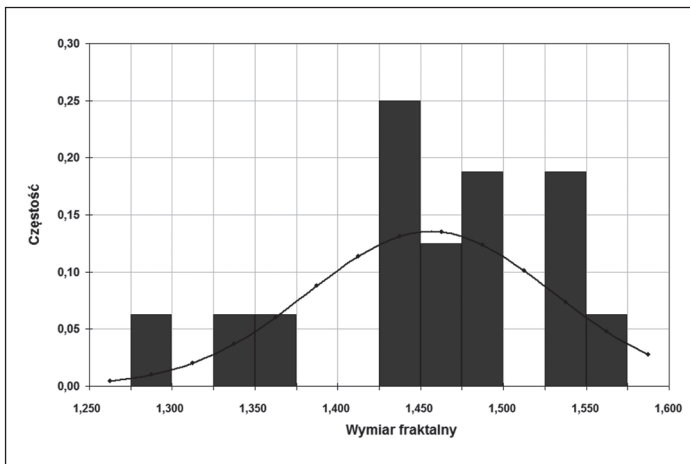
Prócz analizy opierającej się na porównaniu miar sumarycznie opisujących oszacowania wymiarów fraktalnych zastosowano także procedurę mającą na celu określenie struktury badanych indeksów. W tym celu utworzono trzy grupy spółek cechujących się odpowiednio: najwyższym, przeciętnym i najniższym wymiarem fraktalnym (selekcji dokonywano, uszeregowawszy malejąco spółki, począwszy od spółek o największym oszacowanym wymiarze fraktalnym). Liczebności grup dobrano według liczby poddanych badaniom spółek zakwalifikowanych do każdego z indeksów, tj. odpowiednio: 16, 33, 65. W tab. 12 zestawiono udział spółek zaklasyfikowanych do poszczególnych grup w indeksach WIG20, mWIG40, sWIG80.

Tab. 12. Ilościowy udział spółek o najwyższym, przeciętnym i najniższym wymiarze fraktalnym w indeksach WIG20, mWIG40, sWIG80

Spółki o wymiarze fraktalnym	Ilościowy udział w indeksie		
	WIG20	mWIG40	sWIG80
Najwyższym	37,5%	18,2%	6,2%
Przeciętnym	25,0%	30,3%	29,2%
Najniższym	37,5%	51,5%	64,6%

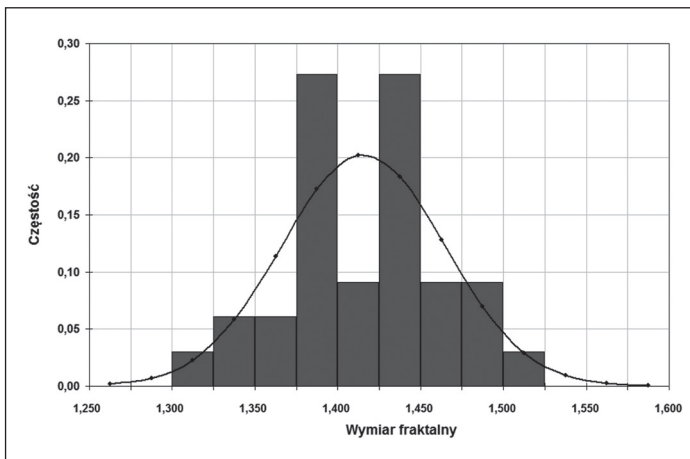
Źródło: Opracowanie własne.

Wielkości przedstawione w powyższej tabeli są zbieżne z dotychczasowymi ustaleniami – występuje **istotny związek pomiędzy poziomem wymiaru fraktalnego** (przynależnością do określonej grupy) **a indeksem, do którego spółka została zakwalifikowana** (czyli zarazem płynnością rynku danych akcji i zainteresowaniem inwestorów).



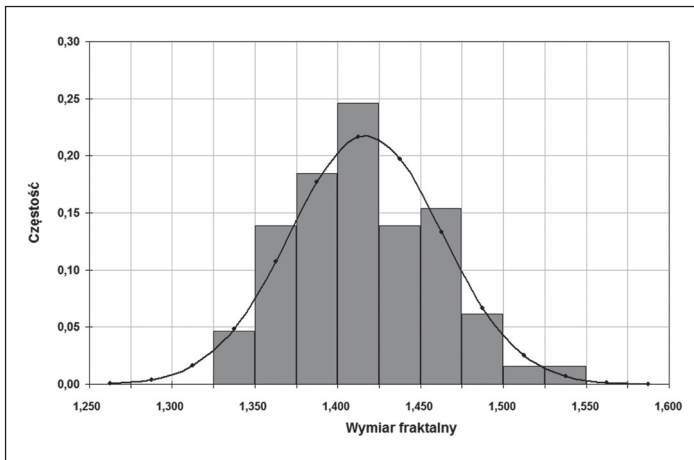
Rys. 39. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks WIG20 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim

Źródło: Opracowanie własne.



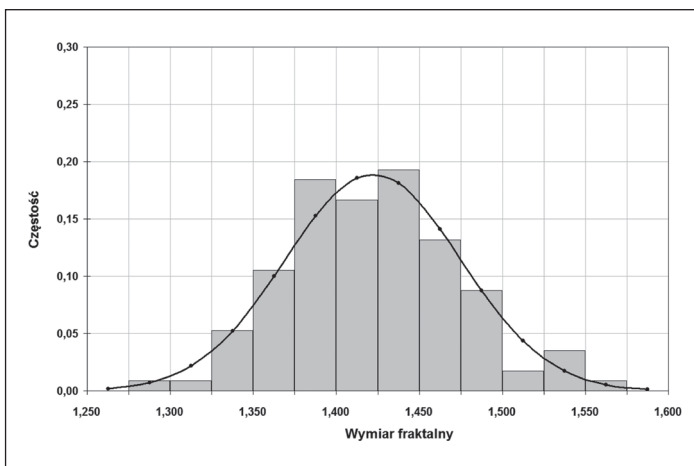
Rys. 40. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks mWIG40 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 41. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 42. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeksy WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim

Źródło: Opracowanie własne.

Ponadto zbadano testem zgodności χ^2 dopasowanie empirycznych rozkładów oszacowanych wymiarów fraktalnych z rozkładem normalnym (rys. 39–42 oraz tab. 11). W żadnym z przypadków hipotezy o normalności rozkładu nie udało się odrzucić (przy poziomie istotności 0,1).

W celu ostatecznego potwierdzenia powyższych konkluzji posłużono się jednoczynnikową analizą wariancji, przy czym za czynnik różnicujący przyjęto przynależność do wspomnianych indeksów. Hipoteza zerowa głosi, że przeciętny poziom wymiaru fraktalnego dla spółek wchodzących w skład każdego z omawianych indeksów jest taki sam²²⁹. Dekomponując wariancję oszacowanych wymiarów fraktalnych, obliczono wariancję według czynnika wynoszącą $S_1^2 = 0,010834$ oraz wariancję resztową $S_u^2 = 0,002587$. W warunkach prawdziwości hipotezy zerowej stosunek wariancji ma rozkład Fishera-Snedecora przy $p-1$ oraz $n-p$ stopniach swobody, gdzie p oznacza liczbę utworzonych klas, a n liczbę obserwacji. Statystyka testowa wyniosła zatem $F = 4,19$. Dla $3-1=2$ oraz $114-3=111$ stopni swobody i poziomu istotności 0,1 obszar krytyczny ma postać $(2,35; +\infty)$. Jako że p-value wynosi w tej sytuacji 0,0176 hipotezę zerową trzeba odrzucić.

²²⁹ Z. Pawłowski: *Ekonometria*. PWN, Warszawa 1975, s. 149–156.

Ostatecznie należy uznać za potwierdzoną hipotezę głoszącą, że **przeciętny poziom wymiaru fraktalnego jest uzależniony od indeksu, do którego zakwalifikowana została dana spółka**. Wynika stąd, że w skład każdego z analizowanych indeksów wchodzi spółki o zróżnicowanych wymiarach fraktalnych, lecz przeciętnie rzecz ujmując, spółek o największych wymiarach można oczekiwać wśród podmiotów zakwalifikowanych do indeksu WIG20, zaś najmniejszych – sWIG80 (bądź mWIG40).

4.2.3. Analiza zależności pomiędzy klasycznymi miarami ryzyka i wymiarem fraktalnym

Badając przydatność wymiaru fraktalnego do pomiaru ryzyka inwestycji finansowych w świetle postawionej hipotezy badawczej, postanowiono także przeanalizować związki zachodzące pomiędzy oszacowanymi klasycznymi miarami ryzyka dla logarytmicznych stóp zwrotu²³⁰. W tym celu skalkulowano **współczynniki korelacji liniowej Pearsona** pomiędzy tymi miernikami²³¹. Ponadto zbadano, jakie zależności występują pomiędzy rangami przypisanymi poszczególnym spółkom w zależności od poziomu ryzyka kwantyfikowanego za pomocą miar klasycznych i oszacowanego wymiaru fraktalnego. Rangę 1 przypisywano spółce, której akcje cechowały się największym poziomem ryzyka dla badanej miary, względnie najmniejszym estymowanym wymiarem fraktalnym, rangę 2 – kolejnej, etc. Badając te zależności, posłużono się **współczynnikiem korelacji rang Spearmana**. Uzyskane rezultaty zestawiono w postaci macierzy korelacji (tab. 13–20).

Tab. 13. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu WIG20

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	$\dim_B(X)$
σ	1,0000	0,9964	0,9796	0,9796	0,8798	0,9453	-0,3729
$s\sigma$	0,9964	1,0000	0,9779	0,9779	0,8847	0,9518	-0,3248
d	0,9796	0,9779	1,0000	1,0000	0,9531	0,9847	-0,2737
sd	0,9796	0,9779	1,0000	1,0000	0,9531	0,9847	-0,2737
Q	0,8798	0,8847	0,9531	0,9531	1,0000	0,9632	-0,0885
VaR _{0,1}	0,9453	0,9518	0,9847	0,9847	0,9632	1,0000	-0,1352
$\dim_B(X)$	-0,3729	-0,3248	-0,2737	-0,2737	-0,0885	-0,1352	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

²³⁰ Analizę dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 zawarto także w R. Buła, K. Pera: Применение концепции фрактальной размерности для оценки инвестиционного риска на финансовых рынках. [W:] С.А. Белозеров (red.): Международный экономический симпозиум – 2015: материалы Международных научных конференций, посвященных 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета 22–25 апреля 2015 г. Сборник статей. Скифия-принт, Санкт-Петербург 2015.

²³¹ Badając celowość wykorzystania szeregów czasowych o zróżnicowanej długości, przeanalizowano zależność pomiędzy liczbą obserwacji a oszacowanym wymiarem fraktalnym. Obliczony współczynnik korelacji wyniósł 0,2520 przy granicznym dla poziomu istotności 0,1 określonym jako 0,1548. Choć korelacja jest w tym przypadku istotna, to jednak na tyle bliska zerowej (współczynnik determinacji na poziomie 6,4%), że ewentualne związki można uznać za nieistotne z punktu widzenia prowadzonych badań.

Tab. 14. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu mWIG40

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9757	0,9688	0,9688	0,8329	0,9416	0,0609
$s\sigma$	0,9757	1,0000	0,9569	0,9569	0,8297	0,9343	0,0918
d	0,9688	0,9569	1,0000	1,0000	0,9365	0,9884	0,1171
sd	0,9688	0,9569	1,0000	1,0000	0,9365	0,9884	0,1171
Q	0,8329	0,8297	0,9365	0,9365	1,0000	0,9372	0,1900
VaR _{0,1}	0,9416	0,9343	0,9884	0,9884	0,9372	1,0000	0,1181
dim _B (X)	0,0609	0,0918	0,1171	0,1171	0,1900	0,1181	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 15. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu sWIG80

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9747	0,9398	0,9398	0,5916	0,9276	-0,3144
$s\sigma$	0,9747	1,0000	0,8833	0,8833	0,5163	0,8697	-0,2635
d	0,9398	0,8833	1,0000	1,0000	0,7948	0,9838	-0,3864
sd	0,9398	0,8833	1,0000	1,0000	0,7948	0,9838	-0,3864
Q	0,5916	0,5163	0,7948	0,7948	1,0000	0,7911	-0,3443
VaR _{0,1}	0,9276	0,8697	0,9838	0,9838	0,7911	1,0000	-0,3649
dim _B (X)	-0,3144	-0,2635	-0,3864	-0,3864	-0,3443	-0,3649	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 16. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9788	0,9528	0,9528	0,6735	0,9384	-0,2709
$s\sigma$	0,9788	1,0000	0,9097	0,9097	0,6157	0,8949	-0,2382
d	0,9528	0,9097	1,0000	1,0000	0,8405	0,9862	-0,2855
sd	0,9528	0,9097	1,0000	1,0000	0,8405	0,9862	-0,2855

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
Q	0,6735	0,6157	0,8405	0,8405	1,0000	0,8402	-0,1949
VaR _{0,1}	0,9384	0,8949	0,9862	0,9862	0,8402	1,0000	-0,2549
dim _B (X)	-0,2709	-0,2382	-0,2855	-0,2855	-0,1949	-0,2549	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 17. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu WIG20

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9912	0,9794	0,9794	0,8529	0,9176	-0,4618
$s\sigma$	0,9912	1,0000	0,9882	0,9882	0,8794	0,9353	-0,3824
d	0,9794	0,9882	1,0000	1,0000	0,9353	0,9676	-0,3559
sd	0,9794	0,9882	1,0000	1,0000	0,9353	0,9676	-0,3559
Q	0,8529	0,8794	0,9353	0,9353	1,0000	0,9676	-0,1353
VaR _{0,1}	0,9176	0,9353	0,9676	0,9676	0,9676	1,0000	-0,2088
dim _B (X)	-0,4618	-0,3824	-0,3559	-0,3559	-0,1353	-0,2088	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 18. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu mWIG40

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9783	0,9495	0,9495	0,8025	0,9255	0,0020
$s\sigma$	0,9783	1,0000	0,9408	0,9408	0,7828	0,9108	0,0949
d	0,9495	0,9408	1,0000	1,0000	0,9295	0,9816	0,0785
sd	0,9495	0,9408	1,0000	1,0000	0,9295	0,9816	0,0785
Q	0,8025	0,7828	0,9295	0,9295	1,0000	0,9174	0,1467
VaR _{0,1}	0,9255	0,9108	0,9816	0,9816	0,9174	1,0000	0,0872
dim _B (X)	0,0020	0,0949	0,0785	0,0785	0,1467	0,0872	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 19. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu sWIG80

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9933	0,9677	0,9677	0,7376	0,9540	-0,3754
$s\sigma$	0,9933	1,0000	0,9589	0,9589	0,7260	0,9397	-0,3826
d	0,9677	0,9589	1,0000	1,0000	0,8424	0,9773	-0,4021
sd	0,9677	0,9589	1,0000	1,0000	0,8424	0,9773	-0,4021
Q	0,7376	0,7260	0,8424	0,8424	1,0000	0,8349	-0,3506
VaR _{0,1}	0,9540	0,9397	0,9773	0,9773	0,8349	1,0000	-0,3852
dim _B (X)	-0,3754	-0,3826	-0,4021	-0,4021	-0,3506	-0,3852	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 20. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	1,0000	0,9923	0,9729	0,9729	0,7893	0,9592	-0,3084
$s\sigma$	0,9923	1,0000	0,9686	0,9686	0,7838	0,9521	-0,2880
d	0,9729	0,9686	1,0000	1,0000	0,8849	0,9838	-0,2803
sd	0,9729	0,9686	1,0000	1,0000	0,8849	0,9838	-0,2803
Q	0,7893	0,7838	0,8849	0,8849	1,0000	0,8742	-0,1791
VaR _{0,1}	0,9592	0,9521	0,9838	0,9838	0,8742	1,0000	-0,2419
dim _B (X)	-0,3084	-0,2880	-0,2803	-0,2803	-0,1791	-0,2419	1,0000

Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy o zerowym współczynniku korelacji na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane współczynniki korelacji – czy to liniowej Pearsona, czy to rang Spearmana – wskazują jednoznacznie na występowanie bardzo silnych związków pomiędzy klasycznymi miarami ryzyka. Wszystkie współczynniki były istotnie różne od zera na poziomie istotności 0,1 i bardzo bliskie 1. Otrzymane rezultaty skłaniają do sformułowania wniosku, że informacja o poziomie ryzyka inwestycji dostarczana przez mierniki klasyczne powiela się. Niezależnie od tego, którą ze wspomnianych wielkości wykorzystać, dokonana ocena byłaby podobna. Z tego punktu widzenia mnogość miar jest sprzeczna z zasadami ekonomii myślenia, dostarczana przez nie informacja jest bowiem zbliżona. Dlatego też w dalszych analizach dotyczących relacji pomiędzy miarami klasycznymi a wymiarem fraktalnym będzie używane wyłącznie odchylenie standardowe, jako miara

najpowszechniej stosowana, mająca najprostszą interpretację oraz będąca istotnym parametrem w modelach fluktuacji cen aktywów.

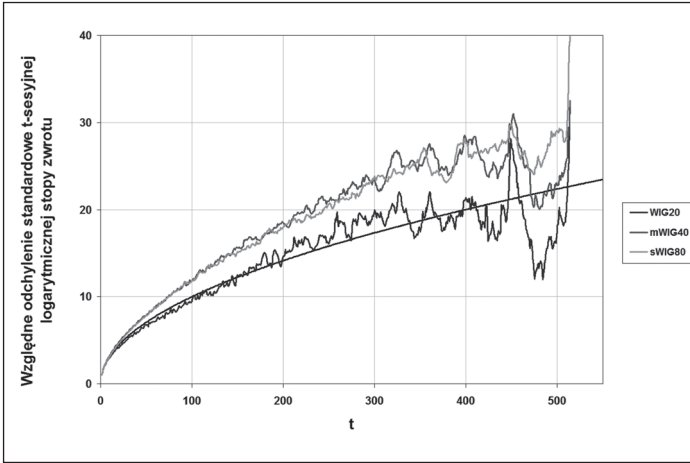
Z odmienną sytuacją mamy do czynienia, analizując stosowne współczynniki korelacji pomiędzy oszacowanym wymiarem fraktalnym a miarami klasycznymi. W tym przypadku obliczone współczynniki korelacji są albo nieistotnie różne od zera, albo co prawda istotne, lecz na tyle niewielkie, że ewentualne związki wydają się nie mieć istotnego znaczenia ekonomicznego. Sytuacja jest zatem odmienna niż poprzednio – **wymiar fraktalny i miary klasyczne dostarczają inwestorowi niepowielających się informacji**. Szacowanie wymiaru fraktalnego jest zatem uzasadnione, umożliwi bowiem zdobycie dodatkowej wiedzy o procesie opisującym zachowanie cen i stóp zwrotu, a tym samym przyczynia się do lepszego zrozumienia jego natury. Powstaje jednak wątpliwość, czy owa dodatkowa wiedza jest dostatecznie ważka, by celowe było jej pozyskiwanie.

4.2.4. Analiza zależności pomiędzy odchyleniem standardowym a długością horyzontu inwestycyjnego

W celu potwierdzenia sformułowanego przypuszczenia autor postanowił zbadać, czy znajomość odchylenia standardowego jednosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu lub wymiaru fraktalnego pozwala poprawnie przewidywać poziom odchylenia standardowego t-sesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu. Jeżeli bowiem okazałoby się, że odchylenie standardowe skalkulowane na podstawie stóp jednookresowych nie jest ściśle powiązane z odchyleniami standardowymi dla stóp wielookresowych, wówczas taka miara zachowuje przydatność tylko dla inwestorów o jednookresowym horyzoncie inwestycyjnym. Dla uczestników rynku o odmiennej długości horyzontu inwestycyjnego wielkość ta byłaby praktycznie bezwartościowa. W modelu Samuelsona-Osborne'a znajomość odchylenia standardowego jednookresowych stóp zwrotu umożliwiła wyznaczenia odchylenia standardowego dla stóp zwrotu dotyczących okresu o dowolnej długości – ze względu na prawdziwość reguły „pierwiastka z czasu”. Na rynku fraktalnym zależność przez nią opisywana nie musi być prawdziwa i w takiej sytuacji owa reguła staje się bezwartościowa, a nawet myląca, ponieważ jej stosowanie przez inwestorów będzie skutkowało przeważnie systematycznym niedoszacowaniem długoterminowego ryzyka inwestycyjnego²³².

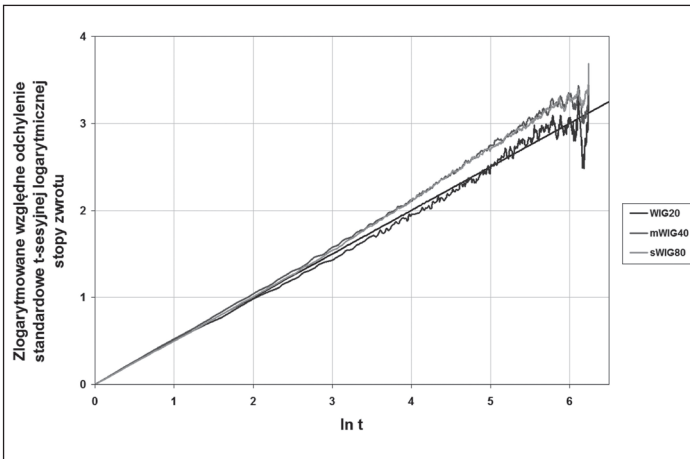
W celu zbadania związków pomiędzy odchyleniem standardowym jednosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu (względnie oszacowanym wymiarem fraktalnym) a fluktuacjami odchylenia standardowego logarytmicznych stóp zwrotu w czasie autor w pierwszej kolejności oszacował na podstawie dostępnych danych poziom odchylenia standardowego wielosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji badanych spółek. W tym celu każdorazowo kalkulowano t-sesyjne logarytmiczne stopy zwrotu dla niezachodzących okresów, dbając, by uzyskać co najmniej 10 obserwacji i na ich podstawie kalkulowano odchylenie standardowe. Ze względu na zróżnicowaną długość wykorzystywanych szeregów czasowych dla każdej ze spółek otrzymano inną liczbę oszacowanych odchyłeń standardowych. Jako że przedmiotem badania nie jest poziom ryzyka, lecz jego fluktuacje w czasie, otrzymane odchylenia standardowe podzielono przez odchylenie standardowe jednosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu dla danej spółki i w ten sposób uzyskano szeregi względnych odchyłeń standardowych t-sesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu.

²³² Ze względu na fakt, że oszacowane wymiary fraktalne skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji są przeważnie mniejsze od 1,5, zatem częstszym zjawiskiem będzie zaniżanie poziomu ryzyka poprzez korzystanie z reguły „pierwiastka z czasu”.



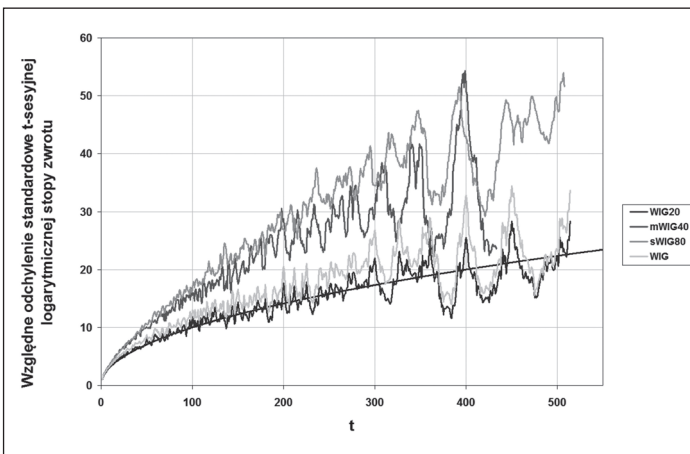
Rys. 43. Przeciętne względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarymicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015

Źródło: Opracowanie własne.



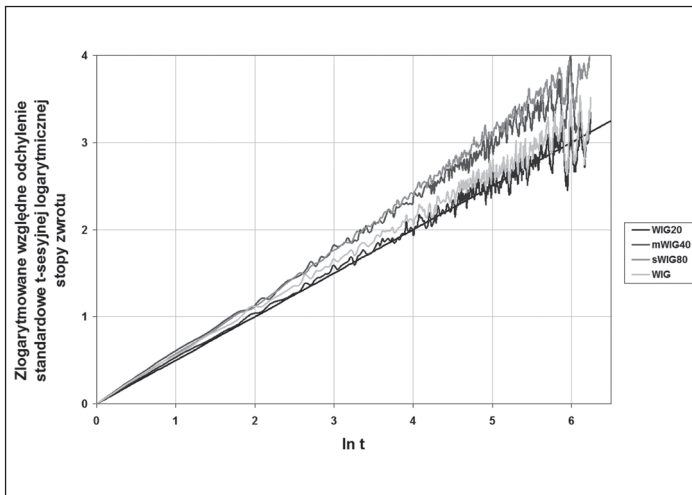
Rys. 44. Przeciętne zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarymicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 45. Względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarymicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 46. Zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015

Źródło: Opracowanie własne.

Obliczone odchylenia standardowe oraz ich ewolucja w zależności od długości okresu, dla którego kalkulowano logarytmiczne stopy zwrotu (przedstawione graficznie także w skali logarytmicznej), potwierdzają uprzednio odnotowane **odstępstwa od reguły „pierwiastka z czasu”**, rządzącej fluktuacjami odchyłeń standardowych w modelu Samuelsona-Osborne’a. Niezgodność ta w pełni ujawnia się podczas analizowania danych dotyczących spółek zakwalifikowanych do indeksów mWIG40 oraz sWIG80, których wymiar fraktalny najsilniej odbiega od wartości przybieranej w sytuacji, gdyby prawdziwa była reguła „pierwiastka z czasu”. Różnice są obecne także w przypadku fluktuacji odchyłeń standardowych kalkulowanych nie dla składników, lecz samych indeksów (rys. 45–46).

4.2.5. Analiza porównawcza dla szeregów czasowych o losowo wymieszanych obserwacjach

Dla uwypuklenia odnotowanych istotnych rozbieżności zastosowano także procedurę, polegającą na **losowym wymieszaniu logarytmicznych jednosesyjnych stóp zwrotu i powtórnym obliczeniu wymiaru fraktalnego** skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu oraz stosownych odchyłeń standardowych. Postępowanie to, nie wpływając na postać rozkładu, skutkuje jednocześnie unicestwieniem wszelkich zależności intertemporalnych między stopami zwrotu, tak że w odniesieniu do danych posortowanych prawo „pierwiastka z czasu” powinno już mieć zastosowanie. Poniżej (tab. 21 oraz rys. 47–50) przedstawiono charakterystyki opisujące empiryczne rozkłady wymiaru fraktalnego szacowanego dla danych wymieszanych. Ponadto w tab. 21 zaprezentowano wyniki testu równości przeciętnego wymiaru fraktalnego dla zbiorów zawierających dane oryginalne i posortowane losowo.

Przedstawione charakterystyki rozkładów empirycznych oraz wyniki testów (przeciętne wymiary fraktalne są istotnie różne statystycznie dla poziomu istotności 0,1 dla indeksów mWIG40, sWIG80 oraz wszystkich badanych akcji rozpatrywanych łącznie) sprawiają, że uprawnione jest wyciągnięcie wniosku, iż **wzmiankowane populacje akcji cechują się średnim wymiarem fraktalnym różnym od właściwego dla szeregów czysto losowych**.

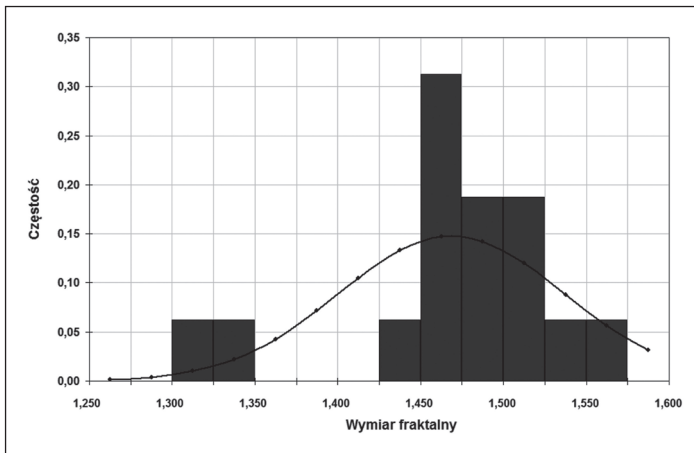
Wykorzystując skalkulowane odchylenia standardowe, na rys. 51–54 (s. 121–122) zaprezentowano wykresy analogiczne do uprzednio przedstawionych, lecz dotyczące danych wymieszanych.

Tab. 21. Oszacowany wymiar fraktalny indeksów WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80 na podstawie skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów oraz komponentów indeksów – dane posortowane losowo

Wielkość	WIG	WIG20	mWIG40	sWIG80	WIG20, mWIG40, sWIG80
Oszacowany wymiar fraktalny					
Dla indeksu					
Wymiar	1,5049	1,5062	1,4753	1,4565	-
Dla komponentów indeksu z uwzględnieniem równych wag					
Średnia	-	1,4687	1,4459	1,4779	1,4674
Mediana	-	1,4734	1,4382	1,4779	1,4663
σ	-	0,0670	0,0418	0,0490	0,0515
Q	-	0,0283	0,0271	0,0287	0,0370
Dla komponentów indeksu z uwzględnieniem wag indeksowych					
Średnia	-	1,4755	1,4463	1,4747	-
Mediana	-	1,4696	1,4375	1,4709	-
σ	-	0,0557	0,0378	0,0471	-
Q	-	0,0243	0,0301	0,0286	-
Test zgodności empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa oszacowanego wymiaru fraktalnego z rozkładem normalnym					
χ^2	-	14,15	3,89	7,50	6,93
p-value	-	0,2247	0,9731	0,7577	0,8048
Test równości przeciętnego wymiaru fraktalnego dla danych oryginalnych i posortowanych losowo					
t	-	0,49	2,73	7,35	6,59
p-value	-	0,6296	0,0101	0,0000	0,0000

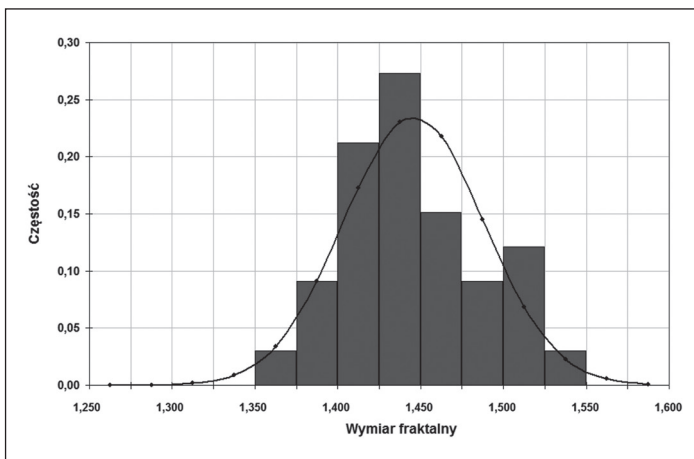
Objaśnienia: Wyróżniono wielkości wskazujące na konieczność odrzucenia hipotezy zerowej danego testu na poziomie istotności 0,1.

Źródło: Opracowanie własne.



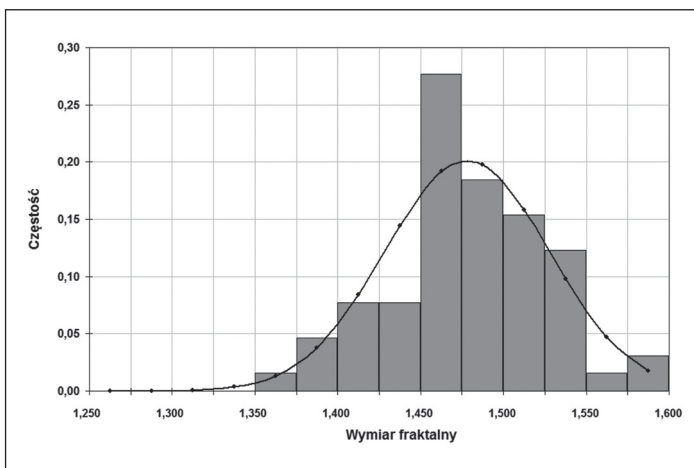
Rys. 47. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks WIG20 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



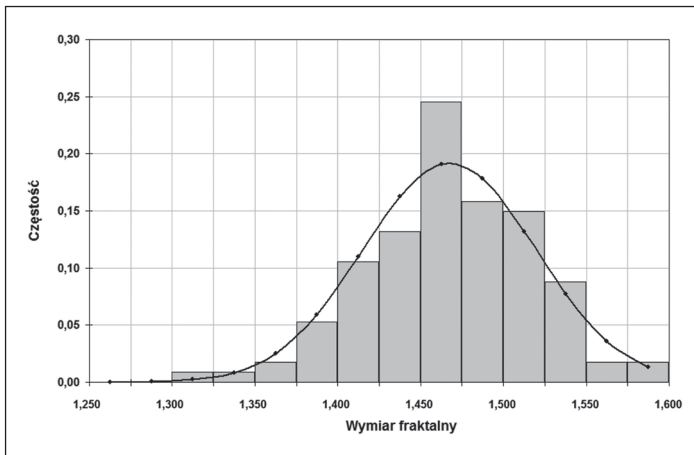
Rys. 48. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks mWIG40 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



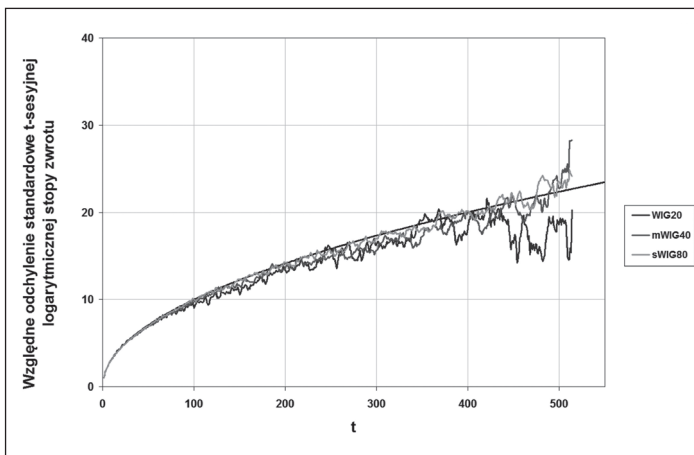
Rys. 49. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



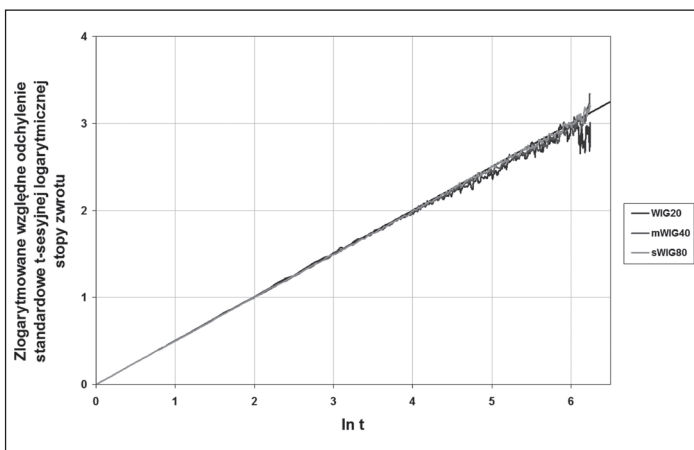
Rys. 50. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeksy WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



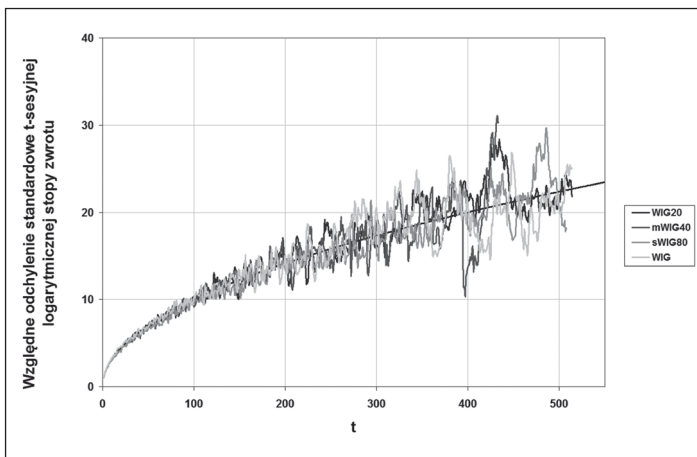
Rys. 51. Przeciętne względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



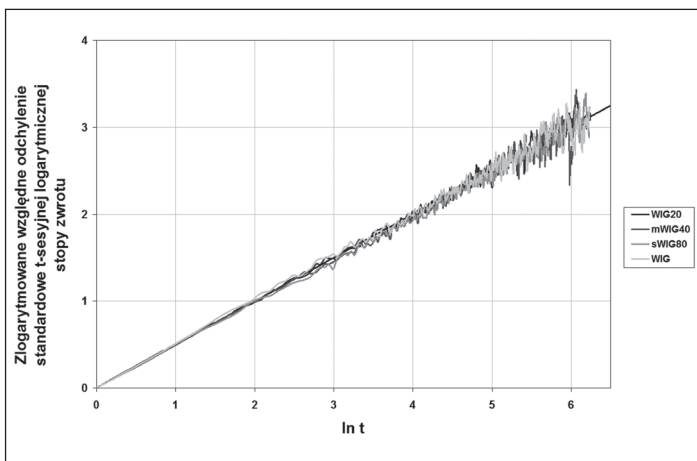
Rys. 52. Przeciętne zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 53. Względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 54. Zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo

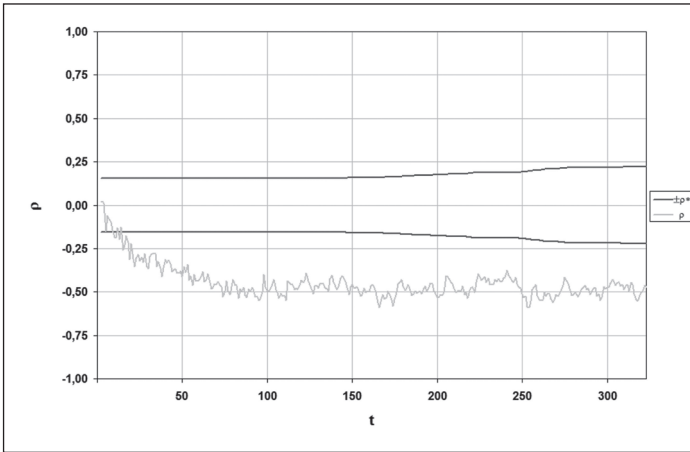
Źródło: Opracowanie własne.

Analiza danych wyjściowych posortowanych w sposób losowy skłania do przyjęcia za prawdziwe stwierdzenia, że w odniesieniu do nich reguła „pierwiastka z czasu” poprawnie opisuje fluktuacje klasycznych miar ryzyka w czasie. Jednocześnie stanowi ona dodatkowe potwierdzenie dla zaproponowanych wniosków – tempo wzrostu odchylenia standardowego jest wyższe w przypadku indeksów mWIG40 oraz sWIG80, co można było przewidzieć na podstawie teorii, korzystając z oszacowanych wymiarów fraktalnych.

4.2.6. Analiza zależności pomiędzy odchyleniem standardowym, długością horyzontu inwestycyjnego a wymiarem fraktalnym

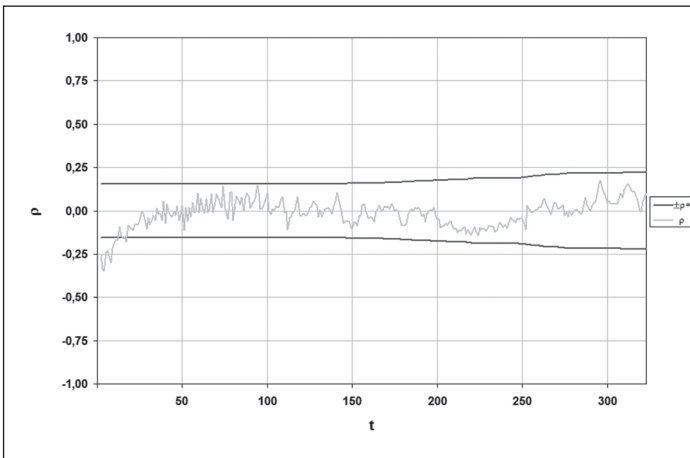
Związki pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnych stóp zwrotu a wymiarem fraktalnym bądź odchyleniem standardowym jednosesyjnych stóp zwrotu badano z wykorzystaniem **analizy korelacyjnej**. W tym celu dla $t > 1$ obliczano współczynnik korelacji pomiędzy wspomnianymi wielkościami. Obliczenia kontynuowano dopóty, dopóki liczba obserwacji (tj. spółek), na podstawie których kalkulowano współczynnik korelacji, była nie mniejsza niż 50% początkowej liczby obserwacji (tj. dla $t = 2$). W każdym przypadku obliczono graniczny poziom

współczynnika korelacji, dla którego zachodziłaby konieczność odrzucenia hipotezy o jego zerowej wartości dla poziomu istotności 0,1 (przy dwustronnym obszarze krytycznym). Wybrane wyniki przedstawiono na poniższych wykresach (rys. 55 i 56).



Rys. 55. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a wymiarem fraktalnym dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 56. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a odchyleniem standardowym jednosesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80

Źródło: Opracowanie własne.

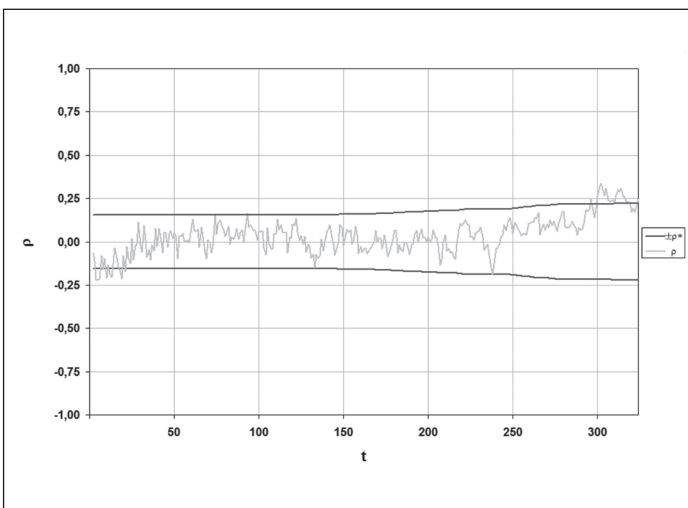
Wykresy ilustrujące uzyskane rezultaty wskazują jednoznacznie na występującą **silną ujemną** i pogłębiającą się wraz ze wzrostem t **korelację pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu a wymiarem fraktalnym**. Stanowią one potwierdzenie dla postawionej uprzednio hipotezy głoszącej, że **w długim horyzoncie czasowym za bardziej ryzykowne należy uznać akcje spółek o niższym wymiarze fraktalnym**. Otrzymane rezultaty wskazują, że większy wymiar fraktalny wskutek silnej ujemnej korelacji jest powiązany z niższym tempem przyrastania odchylenia standardowego wraz z wydłużaniem horyzontu inwestycyjnego – co jest całkowicie zgodne ze sformułowaną hipotezą badawczą.

Jednocześnie należy wskazać, że odchylenie standardowe jednosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu nie wykazuje istotnie różnej od zera korelacji z tempem przyrastania odchylenia standardowego w miarę wzrostu długości horyzontu inwestycyjnego – jest ono zatem w jego prognozowaniu w oparciu o zależności liniowe praktycznie bezużyteczne. Wyniku takiego należało oczekiwać,

ponieważ oszacowane wymiary fraktalne przyjmują wartości różne od $1\frac{1}{2}$, co sugeruje, że reguła „pierwiastka kwadratowego z czasu” nie jest prawdziwa i nie powinna być wykorzystywana.

Ze względu na fakt, że odchylenia standardowe, jak i wymiar fraktalny mają charakter oszacowań, możliwe jest występowanie ewentualnych błędów wynikających z posługiwania się wielkościami uzyskanymi w drodze estymacji. By ograniczyć wpływ zaburzeń na formułowane ostateczne konkluzje oraz uwzględnić możliwą nieliniowość związku, autor postanowił przeprowadzić analizę z wykorzystaniem rang. Obliczając współczynnik korelacji posłużono się zatem nie oszacowanymi wartościami wymiaru fraktalnego czy odchylen standardowych, lecz rangami. Obliczone współczynniki korelacji rang Spearmana, mimo pewnych wahań, wskazują jednoznacznie na brak przydatności odchylenia standardowego jednosesyjnych logarytmicznych stóp zwrotu do przewidywania fluktuacji odchylen standardowych dla wydłużających się horyzontów inwestycyjnych. Nie jest także zasadne wykorzystywanie reguły „pierwiastka z czasu”, oszacowane wymiary fraktalne zmuszają bowiem do odrzucenia hipotezy o ich jednorodności w zbiorze badanych spółek.

Całkowicie odmienna sytuacja zachodzi w odniesieniu do estymowanego wymiaru fraktalnego. Pomimo relatywnie niewielkiej liczby dostatecznie długich szeregów czasowych przeprowadzone obliczenia pozwalają na potwierdzenie w świetle danych empirycznych zasadniczej hipotezy badawczej. Wymiar fraktalny szeregów czasowych skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji umożliwia dokonanie oceny fluktuacji odchylen standardowych w czasie, podczas gdy klasyczne miary ryzyka nie dostarczały takich informacji. Wynika stąd jednoznacznie, że znajomość klasycznych miar ryzyka na fraktalnym rynku finansowym (a za taki trzeba uznać badany rynek akcji) jest niesatysfakcjonująca. Co więcej, brak znajomości wymiaru fraktalnego, pozwalającego na wnioskowanie o fluktuacjach tych miar wraz ze zmianami długości horyzontu inwestycyjnego, musi prowadzić nieuchronnie do zaniżania poziomu rzeczywiście ponoszonego ryzyka, co sprawia, że dysponenci kapitału podejmują decyzje inwestycyjne cechujące się nadmierną w stosunku do akceptowalnej ryzykownością.



Rys. 57. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a wymiarem fraktalnym dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 – dane posortowane losowo

Źródło: Opracowanie własne.

Dodatkowym argumentem przemawiającym za słusznością powyższych konkluzji jest zachowanie współczynników korelacji obliczonych dla danych wymieszanych. W przeciwieństwie do notowań oryginalnych w tym przypadku można zaobserwować praktyczny brak istotnej statystycznie korelacji.

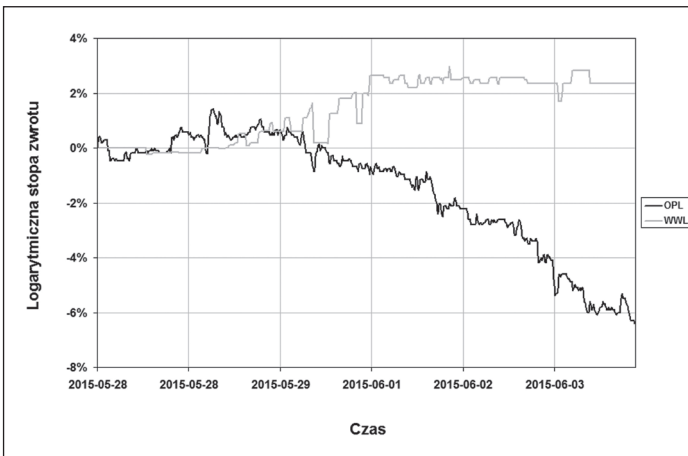
4.2.7. Prezentacja zależności pomiędzy krótko- i długoterminową zmiennością stóp zwrotu z akcji a wymiarem fraktalnym na przykładzie spółek Orange Polska SA oraz Wawel SA

Różnice w zachowaniu cen i stóp zwrotu z akcji oddają znakomicie zaprezentowane poniżej wykresy przedstawiające kształtowanie się skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji dwóch spółek: **Orange Polska SA** oraz **Wawel SA**. Spółki te zostały wybrane jako cechujące się relatywnie znaczną różnicą pomiędzy oszacowanymi wymiarami fraktalnymi (1,5340 dla Orange Polska SA oraz 1,3641 dla Wawel SA). Ponadto w ich przypadku długość odnośnych szeregów jest zbliżona, a jednocześnie obserwacje są dostatecznie liczne, by móc pokazać odmienności w zachowaniu się cen i stóp zwrotu, wynikające, zdaniem autora, ze zróżnicowanego wymiaru fraktalnego, jako że spółki te cechują się zbliżonym poziomem klasycznych miar ryzyka.



Rys. 58. Skumulowana logarytmiczna stopa zwrotu z akcji spółek Orange Polska SA ($\dim_B(X) = 1,5340$) i Wawel SA ($\dim_B(X) = 1,3641$) w okresie 18.11.1998–30.04.2015

Źródło: Opracowanie własne w oparciu o dane serwisu stooq.pl.



Rys. 59. Skumulowana logarytmiczna stopa zwrotu z akcji spółek Orange Polska SA ($\dim_B(X) = 1,5340$) i Wawel SA ($\dim_B(X) = 1,3641$) w okresie 28.05.2015–03.06.2015

Źródło: Opracowanie własne w oparciu o dane serwisu stooq.pl.

Analizując zrealizowane stopy zwrotu w ponad szesnastoletnim horyzoncie inwestycyjnym (rys. 58), można zauważyć, że notowania spółki Wawel SA cechowały się występowaniem silnych trendów w tym okresie, co skutkowało istotnym odchyleniem się cen akcji spółki *in plus* od

poziomu wyjściowego (a skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu – od poziomu zerowego). Z tego też powodu oszacowany wymiar fraktalny jest istotnie mniejszy od $1\frac{1}{2}$, co wskazuje na występowanie zjawiska persystentności – długotrwałego wzmacniania przeszłych trendów. Sytuacja ta rodzi dla inwestora dodatkowe szanse – jeżeli trend ma charakter wzrostowy. Jeżeli jednak wystąpi silna tendencja spadkowa, zjawisko podtrzymywania historycznych trendów może sprawić, że ponoszone straty będą zdecydowanie dotkliwsze niż w sytuacji braku persystentności stóp zwrotu. Tymczasem skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji Orange Polska SA fluktuują wokół poziomu zerowego (a zatem ceny – wokół ceny wyjściowej). I choć zyskowność inwestycji w akcje tej spółki jest niewielka (a zdecydowanie mniejsza niż w przypadku spółki Wawel SA), to także poziom ryzyka związanego z ową inwestycją jest istotnie obniżony, jako że potencjalne straty są możliwe do skompensowania w relatywnie krótkich horyzontach czasowych.

Odmienne wnioski można wyciągnąć, analizując zachowanie skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z akcji wzmiankowanych spółek dla okresów krótkich (rys. 59). Przedstawione kwotowania cen podczas pięciu sesji giełdowych (pięciominutowa częstotliwość notowań) skłaniają do stwierdzenia, że dla relatywnie krótkich horyzontów inwestycyjnych większym poziomem ryzyka cechują się akcje spółki Orange Polska SA, ponieważ podlegają nieustannie istotnym fluktuacjom. W tym samym czasie skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji spółki Wawel SA kształtują się na względnie stabilnym poziomie. Zjawisko to jest spowodowane najprawdopodobniej wzmożonym zainteresowaniem inwestorów akcjami spółki Orange Polska SA – zakwalifikowanej do indeksu WIG20, o dostatecznie płynnym rynku. Sytuacja odwrotna zachodzi w odniesieniu do akcji spółki Wawel SA, gdzie mniejsza skłonność uczestników rynku do zawierania transakcji dotyczących tych papierów wartościowych sprawia, że zmiany cen w krótkim horyzoncie czasowym są względnie rzadkie.

Powyższe konstatacje są dodatkowym argumentem potwierdzającym słuszność zależności opisywanej przez autora w rozdziale drugim, wiążącej poziom ryzykowności inwestycji w instrumenty finansowe z poziomem wymiaru fraktalnego. Zgodnie z przedstawionym uprzednio twierdzeniem **wyższy wymiar fraktalny skumulowanych stóp zwrotu (względnie cen) skutkuje większą ryzykownością inwestycji w dany walor dla relatywnie krótkich horyzontów inwestycyjnych (w granicy skracających się do zera), zaś niższym poziomem ryzyka dla inwestycji o charakterze długoterminowym.**

4.3. Dyskusja wyników i konkluzje

Wyniki badań zaprezentowane w niniejszym rozdziale umożliwiają jednoznaczne potwierdzenie głównej hipotezy, a mianowicie, że znajomość wymiaru fraktalnego rozważanych szeregów czasowych ma istotne znaczenie dla pełnej oraz poprawnej oceny poziomu ryzyka związanego z podejmowanymi inwestycjami finansowymi.

W pierwszej kolejności przeanalizowano wymiary fraktalne wybranych akcji wchodzących w skład głównych indeksów publikowanych przez Giełdę Papierów Wartościowych w Warszawie SA, mając na uwadze ich przynależność do poszczególnych indeksów. Posiłkując się metodami analizy porównawczej w oparciu o skalkulowane mierniki statystyczne wykryto zależność, w myśl której im bardziej rynek rozpatrywanych akcji jest płynny oraz im większą uwagę inwestorów skupia na sobie, tym większy jest odnośny wymiar fraktalny. Zgodnie z przewidywaniami uzyskanymi na gruncie teoretycznym najwyższym wymiarem fraktalnym cechowały się, przeciętnie rzecz biorąc, spółki zakwalifikowane do indeksu dużych spółek WIG20, zaś najmniejszym – do

indeksów sWIG80, względnie mWIG40. Spostrzeżenia powyższe zostały potwierdzone zarówno podczas analizowania poziomu wymiaru fraktalnego przeciętnej spółki zakwalifikowanej do danego indeksu, jak i wymiaru fraktalnego fluktuacji samego indeksu (choć zaobserwowano pewne rozbieżności, które w części można zapewne przypisać faktowi, że badano nie wszystkie spółki uwzględnione w obliczaniu indeksu, jak i zmiennemu składowi indeksu w czasie jego istnienia). Trzeba jednak zaznaczyć, że ów związek ma charakter statystyczny, a nie deterministyczny, jako że w badaniu wykazano, iż spółki tworzące poszczególne indeksy są istotnie heterogeniczne – w żadnym bowiem przypadku nie można odrzucić hipotezy, że ich rozkład w populacji jest normalny. Tym niemniej jej istnienie nie wydaje się wątpliwe, zwłaszcza w świetle wyników analizy wariancji, która skłania do uznania tego związku za rzeczywisty, a nie pozorny. Widać zatem, że już na tym etapie badań można stwierdzić występowanie powiązań pomiędzy poziomem wymiaru fraktalnego a istotnymi charakterystykami badanych spółek, mającymi wpływ na poziom związanego z nimi ryzyka inwestycyjnego.

Interesujących wyników dostarczyły badania wybranych klasycznych miar ryzyka oraz wymiaru fraktalnego. W analizach wykorzystano współczynniki korelacji: liniowej Pearsona oraz rang Spearmana, mając na uwadze możliwość występowania między badanymi wielkościami związków o charakterze nieliniowym. Pierwszym istotnym wnioskiem sformułowanym przez autora było stwierdzenie, że różnorodność informacji dostarczanych przez mierniki klasyczne jest nadzwyczaj niska. W większości przypadków stosowne współczynniki korelacji są niezmiernie bliskie jedności, zaś we wszystkich – istotnie różne od zera. Posiłkowanie się równocześnie wieloma klasycznymi miarami ryzyka jest zatem z punktu widzenia potencjalnego inwestora całkowicie bezcelowe. Informacje o naturze badanych szeregów czasowych zawarte w estymowanych miernikach klasycznych powielają się, co sprawia, że dla celów oceny ryzykowności inwestycji finansowych całkowicie wystarczające wydaje się oszacowanie jednej z miar – np. odchylenia standardowego stóp zwrotu, jako wielkości mającej czytelną interpretację ekonomiczną.

Tymczasem z zupełnie odmienną sytuacją mamy do czynienia, badając związki pomiędzy miarami klasycznymi a wymiarem fraktalnym. Wskazane zależności są albo nieznaczące albo mało znaczące, nie umożliwiając zadowalającego prognozowania poziomu badanych wielkości. Wynika stąd, że zakres informacji dostarczanych przez te mierniki jest różny, co wskazuje na potencjalną użyteczność wymiaru fraktalnego jako uzupełniającej w stosunku do klasycznych miary ryzyka.

Na zasadność posiłkowania się wymiarem fraktalnym wskazują także rezultaty analiz zachowania odchylenia standardowego stopy zwrotu kalkulowanego dla wydłużających się horyzontów inwestycyjnych. Można bowiem z dużą dozą pewności orzec, że reguła „pierwiastka kwadratowego z czasu” jest raczej wyjątkiem niż regularnością wśród badanych spółek. Co ciekawe, przeciętnie rzecz biorąc, owo prawo jest lepszą aproksymacją rzeczywistych zachowań cen akcji w odniesieniu do spółek tworzących indeks WIG20. Jest to o tyle naturalne, że na rynkach bardziej płynnych i cieszących się większym zainteresowaniem inwestorów założenia modelu Samuelsona-Osborne’a wydają się być spełnione w większym stopniu niż na pozostałych rynkach. Dlatego też uzyskane wyniki doskonale korespondują z logicznymi następstwami teorii rynku fraktalnego.

Jakkolwiek dotychczasowe konkluzje stanowią istotne wsparcie dla omawianej konstrukcji teoretycznej, to jednak ze względu na brak stosownego instrumentarium, umożliwiającego określenie istotności uzyskanych rozbieżności, z konieczności posłużono się znaną procedurą, polegającą na losowym wymieszaniu obserwacji badanych szeregów i poddaniu ich ponownym analizom. W efekcie można stwierdzić, że wyniki otrzymane dla danych posortowanych różnią się znacząco od rezultatów pierwotnych. Skłania to do przyjęcia, iż zaobserwowane rozbieżności względem modelu Samuelsona-Osborne’a nie mają charakteru przypadkowego, lecz są skutkiem podporządkowania badanych zjawisk innym regułom.

Najistotniejszą, zdaniem autora, konkluzją wynikającą z przeprowadzonych badań jest potwierdzenie występowania istotnego związku pomiędzy zmianami klasycznych miar ryzyka (reprezentowanych przez odchylenie standardowe logarytmicznych stóp zwrotu) a poziomem wymiaru fraktalnego. Wraz z wydłużaniem się horyzontu inwestycyjnego można zaobserwować istotną statystycznie, silnie ujemną zależność pomiędzy wymiarem fraktalnym a odchyleniem standardowym. Jednocześnie odnotowano brak takiego związku między odchyleniem standardowym jednosesyjnej stopy zwrotu a odpowiadającym mu odchyleniem standardowym wielosesyjnej stopy zwrotu. Co więcej, losowe sortowanie danych skutkuje wyeliminowaniem powiązań pomiędzy wymiarem fraktalnym a odchyleniem standardowym, co dowodzi ich istotności.

Doskonałą ilustracją sformułowanych wniosków, co prawda niemającą waloru konkluzyjnego rozstrzygnięcia, jednak pozwalającą uzmysłwić sobie występujące różnice, jest zachowanie cen i stóp zwrotu akcji spółek Orange Polska SA oraz Wawel SA. Ich istotnie różne wymiary fraktalne materializują się w zdecydowanie odmiennej natury fluktuacjach cen, potwierdzających sformułowane prawo dotyczące zależności pomiędzy zmiennością, wymiarem fraktalnym a długością horyzontu inwestycyjnego.

Rozpatrując łącznie opisywane wyniki badań należy podkreślić, że są one spójne oraz nie uprawniają do odrzucenia postawionej hipotezy badawczej, stanowiąc jednocześnie jej popperowską koroborację. Wydaje się zatem, że twierdzenie, iż na polskim rynku akcji występują struktury o charakterze fraktalnym, a teoria rynku fraktalnego bardziej poprawnie oddaje rzeczywiste fluktuacje kursów niż koncepcja Samuelsona-Osborne'a, nie jest odległe od prawdy. Konstatacja ta ma ważne konsekwencje dla uczestników badanego segmentu rynku kapitałowego. Posiłkowanie się przez nich wyłącznie klasycznymi narzędziami pomiaru ryzyka wypada w tej sytuacji uznać na niedostateczne z punktu widzenia zasadniczego celu, jakim jest poprawna i pełna kwantyfikacja ryzyka. Konieczne jest zatem uwzględnienie przez inwestorów fraktalnego charakteru stosownych szeregów czasowych i kierowanie się w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych także wielkościami opisującymi ich cechy fraktalne. Autor ma nadzieję, że zawarte w niniejszej pracy wyniki badań empirycznych będą stanowić choćby zachętę do rewizji dotychczasowej logiki postrzegania przedmiotowych zagadnień.

Podsumowując, należy stwierdzić, że przedstawione rezultaty świadczą, iż prezentowana uprzednio hipoteza wiążąca względny poziom ryzyka, długość horyzontu inwestycyjnego oraz wymiar fraktalny winna zostać uznana za taką, która poprawnie opisuje rzeczywistość.

Nauka nie spoczywa na solidnym gruncie. Śmiała struktura teorii wznosi się jak gdyby ponad grzędawiskiem. Przypomina gmach wzniesiony na palach. Pale są wbijane z góry w to grzędawisko, lecz nie sięgają żadnej naturalnej podstawy. A jeżeli zaprzestajemy dalszego wbijania tych pali, to nie dlatego, że sięgnęliśmy trwałego gruntu. Przestajemy je wbijać dlatego, że pale te tkwią dostatecznie mocno, aby unieść strukturę, przynajmniej tymczasowo.

K. Popper

Problematyka pomiaru ryzyka inwestycji finansowych jest nieodłącznie związana z zagadnieniami modelowania cen instrumentów finansowych. Nie ulega zatem wątpliwości, że wszelkie niedostatki odnoszące się do wykorzystywanych modeli muszą znaleźć swoje odzwierciedlenie w stosowanej metodyce kwantyfikacji ryzyka. Wydaje się więc naturalne, że w pierwszej kolejności należy starać się zidentyfikować i w miarę możliwości wyeliminować ich dostrzeżone ułomności. Ten sposób myślenia został przyjęty przez autora i zmaterializował się w sposobie konstrukcji monografii.

Autor starał się w możliwie kompleksowy sposób przedstawić genezę, istotę oraz konsekwencje dla oceny ryzyka inwestycji finansowych wynikające z posłkowania się teorią rynku fraktalnego. Historyczny ciąg zdarzeń wiodących do jej sformułowania wydaje się prowadzić poprzez eliminację teorii mniej poprawnie oddających rzeczywistość ku koncepcjom o bardziej ogólnym charakterze. W opinii autora zamierzenie polegające na pokazaniu idei fraktalnego modelowania cen instrumentów finansowych jako naturalnej kontynuacji, a jednocześnie twórczej i nowatorskiej modyfikacji dotychczasowego, opartego na klasycznych miernikach ryzyka podejścia, udało się w pełni zrealizować.

Najciekawszym, zdaniem autora, wnioskiem o charakterze teoriopoznawczym jest pokazanie, że prezentowana w literaturze zależność pomiędzy wymiarem fraktalnym a ryzykiem inwestycyjnym (w sensie zmienności) odpowiada prawdzie na fraktalnym rynku finansowym jedynie dla nieskończenie krótkich horyzontów inwestycyjnych. Przeprowadzone rozważania doprowadziły do wykazania, że w okresie nieskończenie długim (szczególnie istotnym z punktu widzenia wielu koncepcji ekonomicznych) poprawna jest relacja odwrotna, a mianowicie większy wymiar fraktalny jest nieuchronnie powiązany z mniejszym poziomem ryzyka. Jest to osiągnięcie o tyle istotne, że prowadzi do wyeliminowania bezkrytycznego, a merytorycznie całkowicie nieuzasadnionego

posiłkowania się *per analogiam* dla okresów nieskończenie długich zależnością obowiązującą wyłącznie w odniesieniu do nieskończenie krótkich horyzontów inwestycyjnych.

W warstwie metodycznej za interesujące autor uznaje pokazanie, że metoda podziału pola w obecnej postaci nie powinna być wykorzystywana w praktyce, dostarczając obciążonych i wysoce niestabilnych oszacowań. Wskazane niedostatki tej metody, wykazane na gruncie teoretycznym, zostały także potwierdzone przeprowadzonymi badaniami wykorzystującymi dane empiryczne oraz uzyskane w drodze symulacji stochastycznej Monte Carlo. Rozpoznanie wspomnianych wad metody podziału pola sugeruje rewizję wniosków sformułowanych dotychczas w oparciu o jej zastosowanie, jednocześnie stanowiąc inspirację do podjęcia dalszych rozważań nad możliwościami modyfikacji metody w celu poprawy jakości uzyskiwanych wyników.

Jak pokazano, szeregi czasowe logarytmicznych stóp zwrotu dla pokaźnej liczby akcji notowanych na warszawskiej giełdzie nie powinny być postrzegane w kontekście modelu Samuelsona-Osborne'a. Właściwszym rozwiązaniem wydaje się przyjęcie za odpowiednią teorii rynku fraktalnego, jako że oszacowane wymiary fraktalne okazały się w większości przypadków znacząco różne od $1\frac{1}{2}$. Pokazano także istotny statystycznie związek pomiędzy poziomem wymiaru fraktalnego a przynależnością analizowanej spółki do poszczególnych indeksów giełdowych: WIG20, mWIG40, sWIG80. Co więcej, zależność ta pozostaje całkowicie spójna z zaprezentowaną relacją pomiędzy długością horyzontu inwestycyjnego, poziomem ryzyka a płynnością rynku danego papieru wartościowego i stopniem zainteresowania, jakim cieszy się on wśród inwestorów.

Ponadto w pracy przeanalizowano nośność informacyjną poszczególnych miar ryzyka. Pokazano, że informacje dostarczane przez rozmaite klasyczne miary ryzyka w rzeczywistości powielają się, a zatem z punktu widzenia ekonomii myślenia równoczesne posiłkowanie się wieloma z nich jest bezzasadne. Z odmienną sytuacją mamy z kolei do czynienia w przypadku wymiaru fraktalnego – jego powiązania z miarami klasycznymi są na tyle nieznaczące, że można uznać, iż informacje wnoszone przez nie mają charakter wtórny w stosunku do uzyskiwanych za pomocą mierników klasycznych. Wielkości te opisują zatem różne aspekty fluktuacji cen akcji.

Kluczowy z punktu widzenia postawionej hipotezy głównej jest sformułowany wniosek głoszący, że w odniesieniu do akcji badanych spółek nie jest zachowane prawo „pierwiastka z czasu”. Ponadto, w przeciwieństwie do sytuacji mającej miejsce w modelu Samuelsona-Osborne'a, znajomość odchylenia standardowego (czy też ogólniej – na mocy pokazanych związków – klasycznych miar ryzyka) dla pewnego horyzontu inwestycyjnego nie umożliwia przewidywania kształtowania się tych mierników dla horyzontów inwestycyjnych o odmiennych długościach. Kwantyfikacja ryzyka wyłącznie w oparciu o miary klasyczne oszacowane dla danego horyzontu inwestycyjnego musi wobec tego być niepełna – bowiem uwzględnia jedynie aspekty statyczne, a pomija dynamiczne. Zasadne może być zatem posługiwanie się wymiarem fraktalnym. Że jest tak w rzeczywistości, przekonują zaprezentowane w pracy istotne zależności pomiędzy wymiarem fraktalnym a kształtowaniem się odchylenia standardowego wraz ze zmianami długości horyzontu inwestycyjnego oraz brak takich związków dla odchyleń standardowych dla okresów o różnej długości. Celowe wydaje się zatem wprowadzenie wymiaru fraktalnego do zestawu mierników ryzykowności inwestycji finansowych wykorzystywanych w procesie kwantyfikacji ryzyka, co świadczy o braku sprzeczności pomiędzy zasadniczą hipotezą badawczą a analizowanymi danymi.

W opinii autora przedstawione rozważania oraz wyniki badań empirycznych umożliwiają potwierdzenie przydatności wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych jako istotnej miary ryzykowności inwestycji. Tym samym należy stwierdzić, że zakreślony zasadniczy cel badawczy został zrealizowany.

Autor jest jednocześnie daleki od uznania, że zaprezentowane rozważania dostarczają jednoznacznych i wyczerpujących odpowiedzi na pojawiające się wątpliwości związane z fraktalnym ujęciem problemu kwantyfikacji ryzyka inwestycji finansowych – jest wręcz przekonany, że jest to w rzeczywistości niemożliwe. Złożoność przedmiotowych zagadnień jest tak wielka, że konieczne są dalsze dogłębne badania nad naturą analizowanych zjawisk. Trafne wydaje się tu określenie Alfreda Marshalla twierdzącego w swym dziele, że „Gdy przejdzie po nas wiele pokoleń, będzie się, być może, wydawało, że nasze ideały i metody należą do dzieciństwa ludzkości raczej, niż do jej wieku dojrzałego”²³³. Tym niemniej nie ma żadnego usprawiedliwienia dla porzucenia naukowego obowiązku zbliżania się, choćby bardzo powoli, do lepszego niż istniejące wyjaśnienia rzeczywistości. Tej zasadzie autor starał się pozostać wierny w trakcie pracy nad niniejszą monografią.

²³³ A. Marshall: *Zasady ekonomiki*. Tom I. Wydawnictwo M. Arcta, Warszawa 1925, s. 43.

Literatura

1. Adler C., Carter P., Cawley R.: A Comparison of the Fractal Dimensions of Cloud Radiance Graphs for Two Infrared Color Bands. „Lecture Notes in Physics”, Vol. 278/1987.
2. Barcellos A.: The Fractal Geometry of Mandelbrot. „The College Mathematics Journal”, Vol. 15, No. 2 March 1984.
3. Barnsley M.: Fractals Everywhere. Academic Press, Boston et al. 1988.
4. Barone L.: Bruno de Finetti and the Case of the Critical Line’s Last Segment. „Insurance: Mathematics and Economics”, Vol. 42, No. 1 February 2008.
5. Beran J.: Statistics for Long-Memory Processes. Chapman & Hall, New York et al. 1994.
6. Berger J., Mandelbrot B.: A New Model for Error Clustering in Telephone Circuits. „IBM Journal of Research and Development”, Vol. 7, No. 3 July 1963.
7. Bęben M., Orłowski A.: Correlations in financial time series: established versus emerging markets. „European Physical Journal B”, No. 20/2001.
8. Bookstaber R., Langsam J.: Predictable Behavior: Comment. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 3 June 1985.
9. Booth G., Kaen F., Koveos P.: Persistent Dependence in Gold Prices. „The Journal of Financial Research”, Vol. 5, No. 1 Spring 1982.
10. Borel E.: Prawdopodobieństwo i pewność. PWN, Warszawa 1963.
11. Brooks R.: The Mandelbrot Set. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 12, No. 1/1990.
12. Brooks R., Matelski P.: The Dynamics of 2-Generator Subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$. [In:] Kra I., Maskit B. (eds.): Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference. Princeton University Press, Princeton 1981.
13. Buczek S.: Efektywność informacyjna rynków akcji. Teoria a rzeczywistość. SGH, Warszawa 2005.
14. Buczkowski S., Hildgen P., Cartilier L.: Measurements of fractal dimension by box-counting: a critical analysis of data scatter. „Physica A”, No. 252/1998.
15. Buła R.: Analiza wymiaru fraktalnego spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie – aspekty metodyczne. „Nauki o Finansach”, nr 1/2017.
16. Buła R.: Aspekty metodyczne szacowania wymiaru fraktalnego finansowych szeregów czasowych. [W:] Kuczera M. (red.): Młodzi naukowcy dla polskiej nauki. Cz. IX. Tom II. Creativetime, Kraków 2012.
17. Buła R.: Efektywność informacyjna a zachowanie cen akcji tworzących indeks WIG20. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 177/2014.
18. Buła R.: Fluktuacje cen towarów rolnych w świetle analizy fraktalnej. [W:] Gołębiewska B.: Wyzwania współczesnej gospodarki – aspekty teoretyczne i praktyczne. Wydawnictwo Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, Warszawa 2015.
19. Buła R.: Metoda podziału pola a metoda segmentowo-wariacyjna szacowania wymiaru fraktalnego. [W:] Kuczera M. (red.): Nowe trendy w naukach humanistycznych i społeczno-ekonomicznych. Cz. 3. Tom III. Creativescience, Kraków 2012.
20. Buła R.: Metodyczne aspekty weryfikacji hipotezy efektywności rynku na przykładzie notowań Powszechnej Kasy Oszczędności Bank Polski Spółka Akcyjna. Praca magisterska. Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice 2011.
21. Buła R.: Modified method of area division in fractal dimension estimation. [In:] M. Čulík (ed.): Financial Management of Firms and Financial Institutions. VŠB-Technical University of Ostrava, Ostrava 2017.
22. Buła R.: Ryzyko inwestycji a wymiar fraktalny. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 155/2013.
23. Buła R.: Wpływ kryzysu finansowego na oszacowania wykładnika Hursta – analiza fraktalna cen wybranych metali. [W:] Grzywacz J., Kowalski S. (red.): Gospodarka rynkowa w warunkach kryzysu. Wyd. PWSZ w Płocku, Płock 2012.

24. Buła R., Pera K.: Fractal features of Russian ruble exchange rates. [W:] Елецкий Н.Д. (red.): Проблемы и тенденции трансформации мировой экономики. Издательский центр ДГТУ, Ростов-на-Дону 2015.
25. Buła R., Pera K.: Применение концепции фрактальной размерности для оценки инвестиционного риска на финансовых рынках. [W:] Белозеров С.А. (red.): Международный экономический симпозиум – 2015: материалы Международных научных конференций, посвященных 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета 22–25 апреля 2015 г. Сборник статей. Скифия-принт, Санкт-Петербург 2015.
26. Campbell J., Lo A., MacKinlay C.: The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, Princeton 1997.
27. Carlson J.: Are Price Expectations Normally Distributed? „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 70, No. 352 December 1975.
28. Carter P., Cawley R., Mauldin D.: Mathematics of Dimension Measurement for Graphs of Functions. [In:] Weitz D., Sander L., Mandelbrot B. (eds.): Fractal Aspects of Materials. Materials Research Society, Pittsburgh 1988.
29. Carter P., Cawley R., Yorke J., Melnik M.: Dimension Measurements from Cloud Radiance. [In:] Mayer-Kress G. (ed.): Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Springer, Berlin 1986.
30. Chatterjee S., Yilmaz M.: Chaos, Fractals and Statistics. „Statistical Science”, Vol. 7, No. 1/1992.
31. Clark P.: A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices. „Econometrica”, Vol. 41, No. 1 January 1973.
32. Clarkson R.: A Fractal Probability Distribution for Financial Risk Applications. http://www.actuaries.org/EVENTS/Congresses/Cancun/afir_subject/afir_36_clarkson.pdf.
33. Cootner P.: Comments on the Variation of Certain Speculative Prices. [In:] Cootner P. (ed.): The Random Character of Stock Market Prices. The M.I.T. Press, Cambridge 1964.
34. Cootner P. (ed.): The Random Character of Stock Market Prices. The M.I.T. Press, Cambridge 1964.
35. Cootner P.: Stock Prices: Random vs. Systematic Changes. [In:] Cootner P. (ed.): The Random Character of Stock Market Prices. The M.I.T. Press, Cambridge 1964.
36. Corazza M., Malliaris A.: Multifractality in Foreign Currency Markets. „Multinational Finance Journal”, Vol. 6/2000.
37. Da Silva S., Gleria I., Matsuhi R., Figueirego A.: Hurst exponents, power laws and efficiency in the Brazilian foreign exchange market. „Economics Bulletin”, Vol. 7, No. 1/2007.
38. Danilenko S.: Hurst Analysis of Baltic Sector Indices. [In:] Sakalauskas L., Skiadas C., Zavadskas E. (eds.): ASMDA-2009 Selected papers. Technika, Vilnius 2009.
39. Danilenko S.: R/S financial market analysis. „Lietuvos matematikos rinkiny”, No. 48–49/2008.
40. Domański Cz.: Statystyczne testy nieparametryczne. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1979.
41. Dubuc B., Quiniou J., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S.: Evaluating the fractal dimension of profiles. „Physical Review A”, Vol. 39, No. 3 February 1989.
42. Elliott R.: Nature’s Law. The Secret of the Universe. [In:] Prechter R. (ed.): The Major Works of R.N. Elliott. New Classics Library, Gainesville 1987.
43. Elliott R.: The Wave Principle. [In:] Prechter R. (ed.): The Major Works of R.N. Elliott. New Classics Library, Gainesville 1987.
44. Elton E., Gruber M.: Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych. WIG-Press, Warszawa 1998.
45. Engelking R.: Teoria wymiaru. PWN, Warszawa 1977.
46. Falconer K.: Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, Chichester 2003.
47. Fama E.: The Behavior of Stock-Market Prices. „The Journal of Business”, Vol. 38, No. 1 January 1965.
48. Fama E.: Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. „The Journal of Business”, Vol. 36, No. 4 October 1963.
49. Fama E.: Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. „Management Science”, Vol. 11, No. 3 January 1965.
50. Fama E.: Risk, Return and Equilibrium. „The Journal of Political Economy”, Vol. 79, No. 1 January-February 1971.
51. Fama E., French K.: Permanent and Temporary Components of Stock Prices. „The Journal of Political Economy”, Vol. 96, No. 2 April 1988.
52. Fama E., Roll R.: Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. „Journal of American Statistical Association”, Vol. 66, No. 334 June 1971.
53. Fama E., Roll R.: Some Properties of Symmetric Stable Distributions. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 63, No. 323 September 1968.

54. Fielitz B., Smith E.: Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 67, No. 340 December 1972.
55. Franzke C., Graves T., Watkins N., Gramacy R., Hughes C.: Robustness of Estimators of Long-Range Dependence and Self-Similarity under non-Gaussianity. „Philosophical Transactions of the Royal Society A”, Vol. 370, No. 1962 March 2012.
56. Gabryś A.: Rynek kapitałowy w ujęciu fraktalnym. Aurea Mediocritas, Warszawa 2005.
57. Garrison R.: Predictable Behavior: Comment. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 3 June 1985.
58. Gliwienko W.: Rachunek prawdopodobieństwa. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1953.
59. Gnedenko B., Kolmogorov A.: Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Addison-Wesley Publishing Company, Reading et al. 1968.
60. Goldschlag M.: Przyczynek do metodyki pomiarów długości linii krzywych na kartach. „Kosmos”, z. 4–6 czerwiec 1913.
61. Gordon M.: The Investment, Financing, and the Valuation of the Corporation. Richard D. Irwin, Homewood 1962.
62. Górski A.: Comment on fractality of quantum mechanical energy spectra. <http://arxiv.org/pdf/chao-dyn/9804034v1.pdf>.
63. Górski A.: Pseudofractals and box counting algorithm. „Journal of Physics A: Mathematical and General”, Vol. 34, No. 39 October 2001.
64. Granger C.: The Typical Spectral Shape of an Economic Variable. „Econometrica”, Vol. 34, No. 1 January 1966.
65. Granger C., Morgenstern O.: Spectral Analysis of New York Stock Market Prices. [In:] Cootner P. (ed.): The Random Character of Stock Market Prices. The M.I.T. Press, Cambridge 1964.
66. Granger C., Orr D.: “Infinite Variance” and Research Strategy in Time Series Analysis. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 67, No. 338 June 1972.
67. Hadar J., Russell W.: Rules for Ordering Uncertain Prospects. „The American Economic Review”, Vol. 59, No. 1/1969.
68. Harris P.: Was Benoît Mandelbrot Plagiarizing Ralph Elliott’s Wave Principle? http://www.math.utah.edu/vigre/reu/reports/harris_fall2005.pdf.
69. Heiner R.: The Origin of Predictable Behavior. „The American Economic Review”, Vol. 73, No. 4 September 1983.
70. Heiner R.: Origin of Predictable Behavior: Further Modeling and Applications. „The American Economic Review”, Vol. 75, No. 2 May 1985.
71. Heiner R.: Predictable Behavior: Reply. „The American Economic Review”, Vol. 74, No. 3 June 1985.
72. Heller M.: Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna? [W:] Heller M., Życiński J., Michalak A. (red.): Matematyczność przyrody. Papiéska Akademia Teologiczna, Kraków 1990.
73. Heller M.: Filozofia nauki. Wprowadzenie. Petrus, Warszawa 2009.
74. Hempel C.: Podstawy nauk przyrodniczych. WNT, Warszawa 1968.
75. Heydel A.: Uwagi o nieciągłości funkcji w ekonomji. „Ekonomista”, t.II/1934.
76. Hilbert D.: O odwzorowaniu ciągłym linii na kawałku powierzchni. „Prace matematyczno-fizyczne”, t. 5/1894.
77. Horgan J.: Mandelbrot Set-To. „Scientific American”, April 1990.
78. Hurst H.: A Suggested Statistical Model of some Time Series which occur in Nature. „Nature”, Vol. 180, No. 4584 September 1957.
79. Hurst H.: Long-term Storage Capacity of Reservoirs. „Transactions of the American Society of Civil Engineers”, No. 116/1951.
80. Juzwiszyn J.: Ekonometryczna istota fal Elliotta. [W:] Trzaskalik T. (red.): Modelowanie preferencji a ryzyko '99. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice 1999.
81. Kabašinskas A., Rachev S., Sakalauskas L., Sun W., Belovas I.: Alpha-Stable Paradigm in Financial Markets. <http://www.ams.sunysb.edu/~rachev/publication/review.pdf>.
82. Kaen F., Rosenman R.: Predictable Behavior in Financial Markets: Some Evidence in Support of Heiner’s Hypothesis. „The American Economic Review”, Vol. 76, No. 1 March 1986.
83. Kindleberger C.: Szaleństwo, panika, krach. Historia kryzysów finansowych. WIG-Press, Warszawa 1999.
84. Kinsner W.: A Unified Approach To Fractal Dimensions. „International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence”. Vol. 1, No. 4 October-December 2007.
85. Knight F.: Risk, Uncertainty and Profit. Augustus M. Kelley, New York 1964.

86. von Koch H.: On a Continuous Curve without Tangents Constructible from Elementary Geometry. [In:] Edgar G. (ed.): *Classics on Fractals*. Westview Press, Boulder 2004.
87. Krantz S.: *Fractal Geometry*. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 11, No. 4/1989.
88. Kudrewicz J.: *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 2007.
89. Kuhn T.: *Struktura rewolucji naukowych*. Aletheia, Warszawa 2009.
90. Kuratowski K.: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. PWN, Warszawa 1977.
91. Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y.: Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. „*Journal of Econometrics*”, Vol. 54/1992.
92. Larrain M.: Testing Chaos and Nonlinearities in T-Bill Rates. „*Financial Analysts Journal*”, Vol. 47, No. 5 September-October 1991.
93. Larson A.: Measurement of a Random Process in Futures Prices. [In:] Cootner P. (ed.): *The Random Character of Stock Market Prices*. The M.I.T. Press, Cambridge 1964.
94. Lo A., MacKinlay C.: Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test. „*The Review of Financial Studies*”, Vol. 1, No. 1 Spring 1988.
95. Mackay C.: *Niezwykłe złudzenia i szaleństwa tłumów*. WIG-Press, Warszawa 1999.
96. Majewski S.: Badanie „ryzyka w punkcie” za pomocą wykładnika Hursta na przykładzie kursu akcji Żywca S.A. „*Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*”, Nr 233/1998.
97. Mandelbrot B.: Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 1, Averages and Variances. „*Water Resources Research*”, Vol. 5, No. 1 February 1969.
98. Mandelbrot B.: Correction of an Error in “The Variation of Certain Speculative Prices”. „*The Journal of Business*”, Vol. 45, No. 4 October 1972.
99. Mandelbrot B.: A Fast Fractional Gaussian Noise Generator. „*Water Resources Research*”, Vol. 7, No. 3 June 1971.
100. Mandelbrot B.: *Fractal Financial Fluctuations*. [In:] Lesmoir-Gordon N. (ed.): *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, London 2010.
101. Mandelbrot B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman & Company, New York 1983.
102. Mandelbrot B.: Fractal geometry: what is it, and what does it do? „*Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*”, Vol. 423, No. 1864 May 1989.
103. Mandelbrot B.: A Geometry Able to Include Mountains and Clouds. [In:] Lesmoir-Gordon N. (ed.): *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, London 2010.
104. Mandelbrot B.: Global (long-term) dependence in economics and finance. [In:] Mandelbrot B.: *Gaussian Self-Affinity and Fractals*. Springer, New York 2001.
105. Mandelbrot B.: How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. „*Science*”, Vol. 156, No. 3775 May 1967.
106. Mandelbrot B.: How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. Annotations. http://users.math.yale.edu/mandelbrot/web_pdfs/howLongIsTheCoastOfBritain.pdf.
107. Mandelbrot B.: The inescapable need for fractal tools in finance. „*Annals of Finance*”, Vol. 1, No. 2 April 2005.
108. Mandelbrot B.: Multifractal Measures, Especially for the Geophysicist. [In:] Scholz C., Mandelbrot B. (eds.): *Fractals in Geophysics*. Springer, Basel 1989.
109. Mandelbrot B.: New Methods in Statistical Economics. „*The Journal of Political Economy*”, Vol. 71, No. 5 October 1963.
110. Mandelbrot B.: “New Methods of Statistical Economics” Revisited: Short versus Long Tails and Gaussian versus Power-Law Distributions. „*Complexity*”, Vol. 14, No. 3/2008.
111. Mandelbrot B.: On Fractal Geometry, and a Few of the Mathematical Questions It Has Raised. [In:] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians August 16–24 1983 Warszawa*. PWN, Warszawa 1984.
112. Mandelbrot B.: Parallel cartoons of fractal models in finance. „*Annals of Finance*”, Vol. 1, No. 2 April 2005.
113. Mandelbrot B.: The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income. „*International Economic Review*”, Vol. 1, No. 2 May 1960.
114. Mandelbrot B.: Random Walks, Fire Damage Amount and other Paretian Risk Phenomena. „*Operations Research*”, Vol. 12, No. 4 July-August 1964.
115. Mandelbrot B.: Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence. „*Water Resources Research*”, Vol. 5, No. 5 October 1969.

116. Mandelbrot B.: Scaling in financial prices. „Quantitative Finance”, Vol. 1/2001.
117. Mandelbrot B.: Some “Facts” That Evaporate Under Examination. „The Mathematical Intelligencer”, Vol. 11, No. 4/1989.
118. Mandelbrot B.: Sources of inspiration and historical background. [In:] Mandelbrot B.: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, New York et al. 1997.
119. Mandelbrot B.: States of randomness from mild to wild, and concentration from the short to the long run. [In:] Mandelbrot B.: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, New York et al. 1997.
120. Mandelbrot B.: Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. „Annals of Economic and Social Measurement”, Vol. 1, No. 3 July 1972.
121. Mandelbrot B.: The Variation of Certain Speculative Prices. „The Journal of Business”, Vol. 36, No. 4 October 1963.
122. Mandelbrot B.: The Variation of Some Other Speculative Prices. „The Journal of Business”, Vol. 40, No. 4 October 1967.
123. Mandelbrot B.: Three Fractal Models in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. „Economic Notes”, Vol. 26, No. 2/1997.
124. Mandelbrot B.: When Can Price be Arbitraged Efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models. „The Review of Economics and Statistics”, Vol. 53, No. 3 August 1971.
125. Mandelbrot B., Hudson R.: *The (mis)Behaviour of Markets*. Profile Books, London 2008.
126. Mandelbrot B., van Ness J.: Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. „Society for Industrial and Applied Mathematics Journal”, Vol. 10, No. 4 October 1968.
127. Mandelbrot B., Taylor H.: On the Distribution of Stock Price Differences. „Operations Research”, Vol. 15, No. 6 November-December 1967.
128. Mandelbrot B., Wallis J.: Noah, Joseph, and Operational Hydrology. „Water Resources Research”, Vol. 4, No. 5 October 1968.
129. Mandelbrot B., Wallis J.: Some Long-Run Properties of Geophysical Records. „Water Resources Research”, Vol. 5, No. 2 April 1969.
130. Mandelbrot’s Reply and Prechter’s Response. <http://www.elliottwave.com/education/SciAmerican/mandelbrot-reply.aspx>.
131. Mantegna R., Stanley H.: *Ekonofizyka. Wprowadzenie*. WN PWN, Warszawa 2001.
132. Marcinkiewicz E.: Badanie zależności pomiędzy wartością wykładnika Hursta a skutecznością strategii inwestycyjnych opartych na analizie technicznej. „Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie”, Nr 60/2006.
133. Markowitz H.: Portfolio Selection. „The Journal of Finance”, Vol. 7, No. 1 March 1952.
134. Marshall A.: *Zasady ekonomiki. Tom I*. Wydawnictwo M. Arcta, Warszawa 1925.
135. Martyn T.: *Fraktale i obiektowe algorytmy ich wizualizacji*. Wydawnictwo NAKOM, Poznań 1996.
136. Mastalerz-Kodzis A.: *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2003.
137. Mastalerz-Kodzis A.: Teoria fal Elliotta a teoria fraktali – podobieństwa i różnice w podejściu do modelowania szeregów oraz opisu zachowań inwestora. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 132/2013.
138. Matos J., Gama S., Ruskin H., Sharkasi A., Crane M.: Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets. „Physica A”, No. 387/2008.
139. Matteo T., Aste T., Dacorogna M.: Scaling behaviors in differently developed markets. „Physica A”, Vol. 324/2003.
140. McCulloch H.: Continuous Time Processes with Stable Increments. „Journal of Business”, Vol. 51, No. 4 October 1978.
141. McKenzie M.: Non-Periodic Australian Stock Market Cycles: Evidence from Rescaled Range Analysis. „Economic Record”, Vol. 77, No. 239 December 2001.
142. Menger K.: What is Dimension? „The American Mathematical Monthly”. Vol. 50, No. 1 January 1943.
143. Mercik S., Weron K., Burnecki K., Weron A.: Enigma of Self-Similarity of Fractional Lévy Stable Motions. „Acta Physica Polonica B”, Vol. 34/2003.
144. Minsky H.: The Financial Instability Hypothesis: A Clarification. http://digitalcommons.bard.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1144&context=hm_archive.

145. Mitrenga D.: Metodyczne podstawy symulacji stochastycznej Monte Carlo. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 204/2014.
146. Mittnik S., Rachev S.: Stable Distributions for Asset Returns. „Applied Mathematics Letters”, 1989, Vol. 2, No. 3.
147. Mularczyk A.: Fraktalne wspomaganie zarządzania zapasami. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach”, nr 50/2008.
148. Mularczyk A., Zdonek I.: Analiza statystyk stron internetowych Politechniki Śląskiej metodami fraktalnymi. „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Organizacja i Zarządzanie”, z. 64, nr 1894/2013.
149. Nawrocki D.: R/S Analysis and Long Term Dependence in Stock Market Indices. „Managerial Finance”, Vol. 21, No. 7/1995.
150. Orzeszko W.: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397/2010.
151. Osborne M.F.M.: Brownian Motion in the Stock Market. „Operations Research”, Vol. 7, No. 2 March-April 1959.
152. Papla D.: Przegląd rozkładów teoretycznych używanych do modelowania stóp zwrotu z akcji. „Taksonomia. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu”, nr 1022/2004.
153. Papla D.: Zastosowanie analizy R/S jako metody badania błędzenia losowego. „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu”, nr 813/1999.
154. Pawłowski Z.: Ekonometria. PWN, Warszawa 1975.
155. Peano G.: Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. „Mathematische Annalen”, t. 36/1890.
156. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D.: Granice chaosu. Fraktale. Cz. 1 i 2. WN PWN, Warszawa 1997.
157. Pera K., Buła R., Mitrenga D.: Modele inwestycyjne. C.H. Beck, Warszawa 2014.
158. Perkal J.: O długości krzywych empirycznych. „Zastosowania matematyki”, nr 3/1957.
159. Perkal J.: O ε -aureolach. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Prace Matematyczne”, No. 3/1959.
160. Perkal J.: On the ε -Length. „Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences”, Vol. 4, No. 7/1956.
161. Peters E.: Fractal Market Analysis. John Wiley & Sons, New York et al. 1994.
162. Peters E.: Fractal Structure in the Capital Markets. „Financial Analysts Journal”, Vol. 45, No. 4 July-August 1989.
163. Peters E.: R/S Analysis Using Logarithmic Returns. „Financial Analysts Journal”, Vol. 48, No. 6 November-December 1992.
164. Peters E.: Simple and Complex Market Inefficiencies: Integrating Efficient Markets, Behavioral Finance, and Complexity. „The Journal of Behavioral Finance”, Vol. 4, No. 4/2003.
165. Peters E.: Teoria chaosu a rynki kapitałowe. WIG-Press, Warszawa 1997.
166. Pierański P.: Fraktale. Od geometrii do sztuki. Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992.
167. Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu. Michał Glücksberg, Warszawa 1874.
168. Popper K.: Logika odkrycia naukowego. WN PWN, Warszawa 2002.
169. Popper K.: Wiedza obiektywna. Ewolucyjna teoria epistemologiczna. WN PWN, Warszawa 1992.
170. Praetz P.: The Distribution of Share Price Changes. „The Journal of Business”, Vol. 45, No. 1 January 1972.
171. Press J.: A Compound Events Model For Security Prices. „The Journal of Business”, Vol. 40, No. 3 July 1967.
172. Przekota G.: Gospodarcze aspekty ryzyka na rynkach finansowych. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2014.
173. Przekota G.: Szacowanie ryzyka zmian cen akcji metodą podziału pola. „Problemy Zarządzania”, Vol. 10, No. 4/2012.
174. Przekota G.: Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola. „Zeszyty Studiów Doktoranckich”, z. 12/2003.
175. Przekota G., Szczepańska-Przekota A.: Analiza empiryczna efektywności polskiego rynku akcji. Ośrodek Analiz Statystycznych, Warszawa 2008.
176. Quirk J., Saposnik R.: Admissibility and Measurable Utility Functions. „The Review of Economic Studies”, Vol. 29, No. 2 February 1962.
177. Ratajczak W.: Metodologiczne aspekty fraktalnego modelowania rzeczywistości. <http://www.zep.amu.edu.pl/pl/wp-content/Fraktale.pdf>.
178. Razdan A.: Scaling in the Bombay stock exchange index. „Pramana – Journal of Physics”, Vol. 58, No. 3 March 2002.
179. Regnault J.: Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse. Mallet-Bachelier & Castel, Paris 1863.

180. Richardson L.: The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. „General Systems of the Society for the Advancement of General Systems Today: Yearbook”, Vol. 6/1961.
181. Rietz H.: Frequency Distributions Obtained by Certain Transformations of Normally Distributed Variates. „Annals of Mathematics”, Vol. 23, No. 4 June 1922.
182. Rothschild M., Stiglitz J.: Increasing Risk: I. A Definition. „Journal of Economic Theory”, Vol. 2, No. 3 September 1970.
183. Rothschild M., Stiglitz J.: Increasing Risk: II. Its Economic Consequences. „Journal of Economic Theory”, Vol. 3, No. 1 March 1971.
184. Roy A.: Safety First and the Holding of Assets. „Econometrica”, Vol. 20, No. 3 July 1952.
185. Samuelson P.: Rational Theory of Warrant Pricing. „Industrial Management Review”, Vol. 6, No. 2 Spring 1965
186. Samuelson P.: Efficient Portfolio Selection for Pareto-Lévy Investments. „Journal of Financial and Quantitative Analysis”, Vol. 2, No. 2 June 1967.
187. Schmittbuhl J., Vilotte J.-P.: Reliability of self-affine measurements. „Physical Review E”, Vol. 51, No. 1 January 1995.
188. Siemieniuk N.: Fraktalne właściwości polskiego rynku kapitałowego. Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2001.
189. Sierpiński W.: O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.27/1916.
190. Sierpiński W.: O krzywych wypełniających kwadrat. „Prace matematyczno-fizyczne”, t.23/1912.
191. Smith H.S.: On the Integration of Discontinuous Functions. „Proceedings of the London Mathematical Society”, Vol. 6, No. 85 June 1875.
192. Smoluk A.: Gielda, fale Elliotta, stożki i walce. [W:] Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9–11 września 2003. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 2003.
193. Stawicki J., Janiak E., Müller-Frączek I.: Różnicowanie fraktalne szeregów czasowych – wykładnik Hursta i wymiar fraktalny. [W:] Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9–11 września 1997. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 1997.
194. Steinhaus H.: Length, shape and area. „Colloquium Mathematicum”, Vol. 3/1954.
195. Steinhaus H.: O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii. „Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego”, nr 4/1949, dod. 5.
196. Steinhaus H.: O długości linii krzywych empirycznych. „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky”, Vol. 74, No. 4/1949.
197. Steinhaus H.: W sprawie mierzenia długości linii krzywych płaskich. „Polski Przegląd Kartograficzny”, nr 37 styczeń 1932.
198. Stevenson R., Bear R.: Commodity Futures: Trends or Random Walks? „Journal of Finance”, Vol. 25, No. 1 March 1970.
199. Stewart I.: Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu. WN PWN, Warszawa 1996.
200. Stewart I.: The Nature of Fractal Geometry. [In:] Lesmoir-Gordon N. (ed.): The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals. Springer, London 2010.
201. Sutcliffe J.: Obituary. Harold Edwin Hurst: 1 January 1880 – 7 December 1978. „Hydrological Sciences Bulletin”, Vol. 24, No. 4/1979.
202. Szarek T.: O wymiarze wykresu funkcji nigdzie nieróżniczkowalnej. „Wiadomości Matematyczne”, t. 42/2006.
203. Szczegółowe zasady konstrukcji i podawania do publicznej wiadomości indeksów i subindeksów giełdowych. Załącznik do Uchwały Nr 1224/2014 Zarządu Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. z dnia 31 października 2014 r. http://www.google.pl/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CC0QFjACahUKEwjIncPz_4rGAhXKsxQKHT7xAGM&url=http%3A%2F%2Fwww.gpw.pl%2Fpub%2Ffiles%2FDOC%2Fregulacje%2F1224_2014.doc&ei=pUF7VYi3I8rnUr7ig5gG&usq=AFQjCNHhVZzNBRFvWX1vL4pBgiwF7hgypg&bvm=bv.95515949,d.d24&cad=rja.
204. Szczepaniak W.: Modelowanie cen instrumentów finansowych przy użyciu procesów stabilnych i hiperbolicznych. [W:] Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 4–6 września 2001. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń 2001.
205. Taqqu M.: Benoît Mandelbrot and Fractional Brownian Motion. „Statistical Science”, Vol. 28, No. 1/2013.
206. Taqqu M., Teverovsky V.: On Estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series. [In:] Adler R., Feldman R., Taqqu M. (eds.): A Practical Guide to Heavy Tails. Birkhäuser, Basel 1998.

207. Taussig F.: Is Market Price Determinate? „The Quarterly Journal of Economics”, Vol. 35, No. 3 May 1921.
208. Taylor C., Taylor J.: Estimating the Dimension of a Fractal. „Journal of the Royal Statistical Society”, Vol. 53, No. 2/1991.
209. Teichmoeller J.: A Note on the Distribution of Stock Price Changes. „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 66, No. 334 June 1971.
210. Tobin J.: Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. „Review of Economic Studies”, Vol. 25, No. 2/1958.
211. Vaga T.: The Coherent Market Hypothesis. „Financial Analysts Journal”, Vol. 46, No. 6 November-December 1990.
212. Veneziano D.: Basic Properties and Characterization of Stochastically Self-Similar Processes in R^d . „Fractals”, Vol. 7, No. 1/1999.
213. Voss R.: Random Fractal Forgeries. [In:] Earnshaw R.: Fundamental Algorithms for Computer Graphics. Springer, Berlin 1991.
214. Waściński T., Przekota G.: Wybrane problemy oceny ryzyka zmian cen akcji za pomocą miar klasycznych i nieklasycznych. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach”, nr 95/2012.
215. Weierstrass K.: On Continuous Functions of a Real Argument that do not have a Well-defined Differential Quotient. [In:] Edgar G. (ed.): Classics on Fractals. Westview Press, Boulder 2004.
216. Welfe A.: Ekonometria. PWE, Warszawa 2003.
217. Weron A., Weron R.: Fractal market hypothesis and two-power laws. „Chaos, Solitons and Fractals”, No. 11/2000.
218. Weron A., Weron R.: Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa 2009.
219. Weron R.: Measuring long-range dependence in electricity prices. [In:] Takayasu H.: Empirical Science of Financial Fluctuations. Springer, Tokyo 2002.
220. Weron R., Przybyłowicz B.: Hurst analysis of electricity price dynamics. „Physica A”, Vol. 283/2000.
221. Working H.: A Theory of Anticipatory Prices. „The American Economic Review”, Vol. 48, No. 2 May 1958.
222. Zawadzki H.: Chaotyczne systemy dynamiczne. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 1996.
223. Zawadzki H.: Multifraktale i rynki finansowe. [W:] Chrzan P. (red.): Metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne w finansach i ubezpieczeniach. Cz. 2. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2006.
224. Zawadzki H. (red.): Zbiory graniczne i atraktory w modelach ekonomii matematycznej. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 2006.
225. Zeug-Żebro K.: Metody odróżniania deterministycznych szeregów czasowych od losowych. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach”, nr 56/2010.
226. Zeug-Żebro K.: Uwagi o statystyce BDS i wykładniku Hursta w odniesieniu do danych giełdowych. „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach”, nr 50/2008.
227. Zielonka P.: O przewidywaniu cen akcji. „Materiały i Studia”, nr 105/2000.
228. Zwolankowska M.: Fraktalna geometria polskiego rynku akcji. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2001.
229. Zwolankowska M.: Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja szacowania wymiaru fraktalnego. „Przegląd Statystyczny”, z. 1–2/2000.
230. Zwolankowska M.: Szacowanie lokalnego wymiaru fraktalnego szeregów czasowych. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 233/1998.
231. Zwolankowska M.: Wykorzystanie wymiaru fraktalnego w ocenie ryzyka inwestycji giełdowych. [W:] Trzaskalik T. (red.): Modelowanie preferencji a ryzyko '99. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adameckiego w Katowicach, Katowice 1999.
232. Zwolankowska M.: Wymiar fraktalny jako miara zmienności stopy zwrotu. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 306/2000.

Spis rysunków

Rys. 1. Przybliżenie funkcji Weierstrassa dla $a = 0,9$, $b = 7$ za pomocą funkcji $W_{20}(x) = \sum_{k=0}^{20} a^k \cos(b^k \pi x)$ dla $x \in (0, 2)$	11
Rys. 2. Przybliżenie funkcji Weierstrassa dla $a = 0,9$, $b = 7$ za pomocą funkcji $W_{20}(x) = \sum_{k=0}^{20} a^k \cos(b^k \pi x)$ dla $x \in (0; 0, 2)$	11
Rys. 3. Iloczyn kartezjański zbioru Cantora i odcinka zawartego w prostej prostopadłej do prostej, której podzbiorem jest zbiór Cantora (przybliżenie)	12
Rys. 4. Etapy konstrukcji krzywej Peano	13
Rys. 5. Etapy konstrukcji krzywej Hilberta	13
Rys. 6. Etapy konstrukcji krzywej von Kocha	14
Rys. 7. Krzywa oraz płatek śniegu von Kocha (przybliżenie)	14
Rys. 8. Etapy konstrukcji trójkąta Sierpińskiego	15
Rys. 9. Trójkąt Sierpińskiego (przybliżenie)	15
Rys. 10. Dywan Sierpińskiego (przybliżenie)	16
Rys. 11. Gąbka Mengera (przybliżenie)	16
Rys. 12. Wypełnione zbiory Julii (przybliżenia) dla odwzorowań: $z \rightarrow z^2 - 0,5 - 0,5i$, $z \rightarrow z^2 - 1$, $z \rightarrow z^2 + 0,25 + 0,5i$, $z \rightarrow z^2 - 0,25 + 0,5i$	17
Rys. 13. Przybliżenie zbioru Mandelbrota wg Brooksa i Matelskiego	18
Rys. 14. Zbiór Mandelbrota (przybliżenie) wraz z wydrukiem uzyskanym przez Mandelbrota	19
Rys. 15. Zależność pomiędzy wielkością podziałki a oszacowaną za jej pomocą długością wybranych krzywych naturalnych wg Richardsona	21
Rys. 16. Idea generowania krzywych nieprostowalnych o zadanym wykładniku samopodobieństwa wg Mandelbrota	23
Rys. 17. S-wymiarowa miara Hausdorffa obiektu F w zależności od s	26
Rys. 18. Pokrycie Minkowskiego zbioru X	27
Rys. 19. Przykładowa siatka kwadratowa oraz $N_\varepsilon(X)$ dla danego ε oraz zbioru X	28
Rys. 20. Zmodyfikowane dywany Sierpińskiego o wymiarze samopodobieństwa $\frac{\ln 40}{\ln 7} \approx 1,90$ i odmiennej konstrukcji	31
Rys. 21. Losowa krzywa von Kocha (przybliżenie)	37
Rys. 22. Przykładowe procesy typu H -ss (a), H -ssi (b) oraz H -ss-si lub H -ssi-si (c)	43
Rys. 23. Samopodobieństwo fal Elliotta	45
Rys. 24. Funkcje gęstości rozkładów α -stabilnych: normalnego i bardziej wysmukłych	56
Rys. 25. Rzeczywisty a postulowany przez model Samuelsona-Osborne'a rozkład dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG dla cen zamknięcia (03.10.1994-05.02.2015)	57
Rys. 26. Rzeczywisty a postulowany przez model Samuelsona-Osborne'a rozkład dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG dla cen zamknięcia (03.10.1994-05.02.2015) dla ogonów rozkładu	57
Rys. 27. Ogony rozkładów cen pszenicy analizowanych przez Mandelbrota	60
Rys. 28. Linie regresji z oszacowanym wykładnikiem K dla badanych przez Hursta zjawisk	62
Rys. 29. Relacje pomiędzy wybranymi procesami stochastycznymi	63
Rys. 30. Idea metody segmentowo-wariacyjnej szacowania wymiaru fraktalnego dla cen akcji	72

Rys. 31. Przykładowe skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji dla różnych wartości wymiaru fraktalnego w ciągu jednego dnia handlowego	75
Rys. 32. Przykładowe skumulowane logarytmiczne stopy zwrotu z akcji dla różnych wartości wymiaru fraktalnego w ciągu ośmiu kwartałów	75
Rys. 33. Odchylenie standardowe przeciętnego przyrostu ułamkowego ruchu Browna	77
Rys. 34. Stosunek odchylenia standardowego przeciętnego przyrostu ułamkowego ruchu Browna do odchylenia standardowego przeciętnego przyrostu standardowego ruchu Browna	77
Rys. 35. Zmiana typu zależności pomiędzy $\ln N_{\varepsilon}(X)$ a $\ln \frac{1}{\varepsilon}$ wynikająca z dyskretnego charakteru analizowanych danych	84
Rys. 36. Idea metody podziału pola	88
Rys. 37. Wymiar szacowany metodą podziału pola a wymiar pudełkowy krzywych	93
Rys. 38. Logarytmiczna skumulowana stopa zwrotu z indeksów WIG, WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 31.12.1997–30.04.2015 r.	104
Rys. 39. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks WIG20 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim	110
Rys. 40. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks mWIG40 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim	110
Rys. 41. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim	111
Rys. 42. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeksy WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim	111
Rys. 43. Przeciętne względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015	117
Rys. 44. Przeciętne zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015	117
Rys. 45. Względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015	117
Rys. 46. Zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015	118
Rys. 47. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks WIG20 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo	120
Rys. 48. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks mWIG40 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo	120
Rys. 49. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeks sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo	120
Rys. 50. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa szacowanego wymiaru fraktalnego dla wybranych spółek tworzących indeksy WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 wraz z dopasowanym rozkładem gaussowskim – dane posortowane losowo	121
Rys. 51. Przeciętne względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo	121
Rys. 52. Przeciętne zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40 oraz sWIG80 w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo	121
Rys. 53. Względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo	122

Rys. 54. Zlogarytmowane względne odchylenie standardowe t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu z indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 oraz WIG w okresie 03.10.1994–30.04.2015 – dane posortowane losowo	122
Rys. 55. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a wymiarem fraktalnym dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80	123
Rys. 56. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a odchyleniem standardowym jednosesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80	123
Rys. 57. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy względnym odchyleniem standardowym t-sesyjnej logarytmicznej stopy zwrotu a wymiarem fraktalnym dla wybranych spółek wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80 – dane posortowane losowo	124
Rys. 58. Skumulowana logarytmiczna stopa zwrotu z akcji spółek Orange Polska SA ($\dim_B(X) = 1,5340$) i Wawel SA ($\dim_B(X) = 1,3641$) w okresie 18.11.1998–30.04.2015	125
Rys. 59. Skumulowana logarytmiczna stopa zwrotu z akcji spółek Orange Polska SA ($\dim_B(X) = 1,5340$) i Wawel SA ($\dim_B(X) = 1,3641$) w okresie 28.05.2015–03.06.2015	125

Spis tabel

Tab. 1. Najistotniejsze zalety i wady najczęściej wykorzystywanych wymiarów w analizie obiektów fraktalnych	32
Tab. 2. Klasyfikacja wybranych procesów fraktalnych	67
Tab. 3. Oszacowany wymiar fraktalny poziomów wybranych indeksów giełdowych w okresie 02.01.2001–03.04.2009 wg W. Orzeszki	73
Tab. 4. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 100-wyrazowego szeregu (1,2,1,2,....,2) wg G. Przekoty	90
Tab. 5. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 100-wyrazowego szeregu (1,2,3,....,100) wg G. Przekoty	91
Tab. 6. Wielkości niezbędne do oszacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola 101-wyrazowego szeregu (0,1,2,....,100)	91
Tab. 7. Spółki zakwalifikowane do indeksu WIG20 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.	98
Tab. 8. Spółki zakwalifikowane do indeksu mWIG40 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.	99
Tab. 9. Spółki zakwalifikowane do indeksu sWIG80 wg stanu z dn. 30 kwietnia 2015 r.	100
Tab. 10. Charakterystyki logarytmicznych stóp zwrotu z wybranych indeksów wraz z wynikami testów statystycznych	106
Tab. 11. Oszacowany wymiar fraktalny indeksów WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80 na podstawie skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów oraz komponentów indeksów	108
Tab. 12. Ilościowy udział spółek o najwyższym, przeciętnym i najniższym wymiarze fraktalnym w indeksach WIG20, mWIG40, sWIG80	110
Tab. 13. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu WIG20	112
Tab. 14. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu mWIG40	113
Tab. 15. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu sWIG80	113
Tab. 16. Macierz korelacji między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80	113
Tab. 17. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu WIG20	114
Tab. 18. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu mWIG40	114
Tab. 19. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksu sWIG80	115
Tab. 20. Macierz korelacji rang Spearmana między wybranymi miarami ryzyka oszacowanymi dla wybranych akcji wchodzących w skład indeksów WIG20, mWIG40, sWIG80	115
Tab. 21. Oszacowany wymiar fraktalny indeksów WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80 na podstawie skumulowanych logarytmicznych stóp zwrotu z indeksów oraz komponentów indeksów – dane posortowane losowo	119

Monografia stanowi skróconą wersję rozprawy doktorskiej pt. „Implikacje teorii rynku fraktalnego dla oceny ryzyka inwestycji finansowych”, za którą Autorowi przyznano Nagrodę Przewodniczącego Komisji Nadzoru Finansowego za najlepszą pracę doktorską z zakresu rynku finansowego w VI edycji ww. Konkursu.

Recenzent: dr hab. Krystian Pera, prof. UE

ISBN 978-83-66322-02-8

Urząd Komisji Nadzoru Finansowego

ul. Piękna 20

00-549 Warszawa

tel. (+48) 22 262 50 00

fax (+48) 22 262 51 11

knf@knf.gov.pl

www.knf.gov.pl

