Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXIII Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy zapadający za 2 lata instrument o następującej funkcji wypłaty:

$$w(S_2) = \begin{cases} 100\,000 \text{ PLN}, & S_2 > 100, \\ 0 \text{ PLN}, & S_2 \leq 100, \end{cases}$$

gdzie S_2 oznacza cenę niepłacącej dywidendy akcji S na moment zapadalności instrumentu. Przy standardowych założeniach modelu Blacka-Scholesa wycenić ten instrument wiedząc, że:

- roczna intensywność oprocentowania wynosi 0.04,
- roczna zmienność ceny akcji wynosi 20%,
- cena akcji w momencie wyceny instrumentu wynosi 90.

Tak obliczona wartość instrumentu wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 38 000 PLN

B) 48 000 PLN

C) 64 000 PLN

D) 73 000 PLN

E) 92 000 PLN

2. Na rynku, na którym poziom stopy zerokuponowej (w ujęciu rocznym) nie zależy od okresu do zapadalności, inwestor rozważa zakup 5-letniej obligacji o nominale 1 000 PLN, płacącej roczny kupon w wysokości 5% i posiadającej wbudowaną opcję wcześniejszego wykupu przez emitenta za 3 lata od emisji, ale po płatności trzeciego kuponu, po cenie 1 000 PLN. Opcja ta jest wykonywana przez emitenta zawsze, gdy jest to dla niego korzystne. Inwestor dokonuje wyceny opisanej obligacji przy założeniu, że stopa zerokuponowa za 3 lata ma rozkład jednostajny na przedziale [4%,8%]. Ponadto wiadomo, że w momencie wyceny stopa zerokuponowa (w ujęciu rocznym) wynosi 6%. Na jaką kwotę, stosując opisany model, inwestor wyceni rozważaną obligację (podać najbliższą odpowiedź)?

A) 803 PLN
B) 956 PLN
C) 958 PLN
D) 1 000 PLN
E) 1 044 PLN

3. Rozważmy dwa ciągłe strumienie płatności α i β, o intensywnościach $\alpha(t) = t,\ t \geq 0$ oraz $\beta(t) = t^2,\ t \geq 0$. Intensywność oprocentowania jest stała i wynosi $\delta > 0$. Oznaczmy przez $MacD_\alpha(t, \delta)$ *Macaulay Duration* w chwili t dla strumienia płatności α, a przez $MacD_\beta(t, \delta)$ *Macaulay Duration* w chwili t dla strumienia płatności β. Wówczas:

A) $MacD_\beta(0, \delta)/MacD_\alpha(0, \delta) = \delta$

B) $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = \delta$

C) $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = 1$

D) $MacD_\beta(0, \delta)/MacD_\alpha(0, \delta) = 2/3$

E) $MacD_\alpha(0, \delta)/MacD_\beta(0, \delta) = 2/3$

Wskazówka:

$$MacD(t, i) = (1 + i) \cdot ModD(t, i) = (1 + i) \cdot \frac{-1}{P(t, i)} \cdot \frac{\partial P(t, i)}{\partial i},$$

gdzie

$$1 + i = e^\delta,$$

a $P(t, i)$ oznacza wartość obecną strumienia płatności w chwili t wyznaczoną przy stopie procentowej i.

4. Niech dany będzie instrument finansowy I o następujących własnościach:

(i) Instrument podzielony jest na transze A, B i C. Nabywca może kupić od emitenta udziały w dowolnej transzy. Ceny zakupu jednego udziału w poszczególnych transzach wynoszą odpowiednio c_A, c_B, c_C.

(ii) W ramach instrumentu do nabycia jest 200 udziałów w transzy A, 600 udziałów w transzy B i 200 udziałów w transzy C. Zakładamy, że w momencie emisji wszystkie udziały zostały sprzedane. Każdy z udziałów ma nominał $\mathrm{N_I} = 500\,000$ PLN.

(iii) Instrument powiązany jest z dziesięcioma trzyletnimi obligacjami – $O_1, O_2, \ldots, O_{10}$ – wyemitowanymi przez różnych emitentów. Każda z obligacji ma nominał $N_O = 100\,000\,000$ PLN i płaci na koniec każdego roku kupony w wysokości 5% nominału, o ile emitent obligacji nie zbankrutował do momentu płatności kuponu. Na koniec okresu inwestycji nie jest zwracany nominał obligacji.

(iv) Z kuponów finansowane są płatności dla nabywców udziałów w transzach instrumentu I. Procedura płatności jest następująca: najpierw realizowane są zobowiązania wobec posiadaczy udziałów w transzy A; następnie, z pozostałych środków, realizowane są zobowiązania wobec posiadaczy udziałów w transzy B; a następnie z reszty środków – w ramach transzy C.

(v) O ile nie nastąpiły żadne bankructwa emitentów obligacji posiadacze udziałów w poszczególnych transzach mogą liczyć na następujące wypłaty na koniec poszczególnych lat: w transzy A 5% od kwoty nominału N_I, w transzy B 10% od kwoty nominału N_I, w transzy C 15% od kwoty nominału N_I. Gdyby w efekcie bankructw emitentów obligacji brakowało środków na realizację wypłat w pełnym zakresie, dostępne środki rozdzielane są po równo pomiędzy udziałowców danej transzy, z uwzględnieniem hierarchii opisanej w punkcie (iv).

(vi) Emitent instrumentu I ustala ceny udziałów c_A, c_B, c_C jako wartość oczekiwaną przyszłych wypłat z tytułu udziału w danej transzy, zdyskontowanych na moment $t = 0$. Emitent instrumentu I przyjmuje, że bankructwa poszczególnych emitentów obligacji są od siebie niezależne. Zakłada także, że w ciągu najbliższych 3 lat prawdopodobieństwo bankructwa emitenta obligacji w okresie jednego roku jest stałe we wszystkich latach i dla wszystkich emitentów i wynosi $p = 0.2$. Do dyskontowania emitent instrumentu I używa stałej rocznej stopy $i = 0.05$.

Stosunek $\frac{c_A}{c_C}$ wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 0.52

B) 0.60

C) 0.75

D) 1.85

E) 4.60

5. Firma A posiada trzyletnią obligację zerokuponową firmy B o nominale 1000 PLN. Prawdopodobieństwo bankructwa firmy B w okresie $[i-1,i)$, dla $i=1,2,3$, wynosi $p_i = i \cdot 6\%$. Czynnik dyskontowy w każdym z powyższych okresów równy jest 0.95. W przypadku niewypłacalności firmy B firma A w momencie zapadalności obligacji odzyska 25% nominału.

Firma A, chcąc się zabezpieczyć przed stratami związanymi z niewypłacalnością firmy B, może:

(i) Zakupić w chwili $\mathrm{i}=0$ od banku instrument CDS (*Credit Default Swap*) na następujących zasadach:

- W przypadku braku niewypłacalności firmy B w okresie $[i-1,i)$, dla $i=1,2,3$, w momencie i firma A płaci bankowi stałą składkę w wysokości $K \cdot (4-i)\%$ nominału obligacji.
- W przypadku niewypłacalności firmy B w dowolnej chwili okresu [0,3], w momencie $i=3$ bank przejmuje od firmy A obligację wypłacając równocześnie nominał.
- Bank nie pobiera dodatkowej marży.

(ii) Zakupić w chwili $i=0$ pewną liczbę trzyletnich europejskich opcji sprzedaży na akcje firmy B. Cena jednej opcji o cenie wykonania 10 PLN wynosi X. Zakładamy, że w przypadku bankructwa firmy B cena akcji spada do 0 PLN.

Dla firmy A obie strategie mają taki sam koszt (w sensie wartości obecnej) w chwili $i=0$. Wyznaczyć wartość X (podać najbliższą odpowiedź):

A) 2.45
B) 2.75
C) 3.05
D) 3.35
E) 3.65

6. Cena pewnej opcji sprzedaży na akcję S niepłacącą dywidendy, wyznaczona w oparciu o model Blacka-Scholesa, w chwili $t = 0$ wynosi $C = 3$. Cena akcji S w chwili $t = 0$ wynosi 40, natomiast parametr zmienności tej akcji $\sigma = 0.1$. Czas do zapadalności opcji to $T = 1$. W chwili $t = 0$ znana jest wartość dwóch parametrów greckich dla tej opcji sprzedaży, a mianowicie:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = -0.69, \qquad \nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 14.11.$$

Oszacować o ile zmieniłaby się cena opcji sprzedaży w przypadku gdyby cena akcji S nagle wzrosła o 1 (podać najbliższą odpowiedź).

A) –0.55
B) –0.65
C) –0.75
D) –0.85
E) –0.95

7. Poniżej przedstawione zostały cztery wzory matematyczne, w których występują wielkości finansowe oznaczone standardowymi symbolami.

- $\frac{d^n}{dv^n}(v^{n-1} \cdot \delta) = \frac{-(1+i)\cdot(n-1)!}{v}$, gdzie δ należy traktować jako funkcję v,
- $(\bar{D}\bar{a})_{\overline{n|}} = \frac{n}{\delta^2} - \frac{\bar{a}_{\overline{n|}}}{\delta}$,
- $(I^{(m)}a)^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \frac{i^{(m)} \cdot d^{(m)}}{m \cdot (i^{(m)} - d^{(m)})}$,
- $\sum_{t=1}^{n} (Ia)_{\overline{t|}} = \frac{\frac{n}{v} - 2 \cdot a_{\overline{n|}} + n \cdot v^n}{i^2}$.

Ustalić, ile wzorów jest prawdziwych.

A) 4

B) 3

C) 2

D) 1

E) 0

8. Renta wieczysta $R1$, wypłaca na początku roku n kwotę $\frac{1}{((n-1)!)^2}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$

Niech $y(v)$ oznacza wartość obecną tej renty obliczoną przy zastosowaniu czynnika dyskontującego v.

Rozważmy funkcję: $z(v) = v \cdot y''(v) - y'(v) + y(v)$.

Funkcja $z(v)$ wyraża wartość obecną renty wieczystej $R2$ płatnej na końcu każdego roku, obliczoną również przy zastosowaniu czynnika dyskontującego v.

Obliczyć różnicę pomiędzy 19- tą i 20-tą ratą (rata 19 – rata 20) renty $R2$.

A) $\frac{790}{19! \cdot 21!}$

B) $\frac{792}{19! \cdot 21!}$

C) $\frac{794}{19! \cdot 21!}$

D) $\frac{796}{19! \cdot 21!}$

E) $\frac{798}{19! \cdot 21!}$

9. Kredyt mieszkaniowy zaciągnięty w kwocie 200 000 spłacany jest ratami płatnymi na końcu każdego roku, w ciągu 25 lat. Rata spłaty kredytu co roku zwiększa się o 1%.

Ile wynosi rata spłaty kredytu zapłacona na końcu pierwszego roku, jeżeli oprocentowanie kredytu jest następujące:

- 8% w latach $5k + 1$,
- 9% w latach $5k + 2$,
- 10% w latach $5k + 3$,
- 7% w latach $5k + 4$,
- 6% w latach $5k + 5$,

gdzie $k = 0, 1, 2, 3, 4$? Podać najbliższą wartość.

A) 17 400

B) 17 500

C) 17 600

D) 17 700

E) 17 800

10. Zasady spłaty kredytu o wartości 400 000 są następujące:

- raty spłaty kredytu są płatne na końcu każdego roku, przez okres 20 lat,
- w pierwszym dziesięcioleciu rata płatna na końcu pierwszego roku wynosi X, a każda kolejna rata jest większa od poprzedniej o 3 000,
- w drugim dziesięcioleciu schemat spłat można przedstawić następująco:
  $\mathrm{Y}, \mathrm{Y}-1\,000, \mathrm{Y}-2\,000, \mathrm{Y}-3\,000, \mathrm{Y}-4\,000, \mathrm{Y}-4\,000, \mathrm{Y}-3\,000, \mathrm{Y}-2\,000, \mathrm{Y}-1\,000, \mathrm{Y},$
- oprocentowanie w pierwszym dziesięcioleciu wynosi 12%, a w drugim 10%,
- różnica między odsetkami zapłaconymi w 7 racie a odsetkami zapłaconymi w 13 racie wynosi 24 720.50.

Obliczyć ile wynosi suma $X + Y$ (podać najbliższą wartość).

A) 80 528

B) 80 628

C) 80 728

D) 80 828

E) 80 928

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	E	
4	D	
5	B	
6	B	
7	E	
8	D	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.