

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXVI Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Załóżmy, że linia lotnicza musi zakupić $k \cdot 1000$ baryłek ropy na koniec miesiący $6k$, dla $k = 1, \dots, 6$. Aby zabezpieczyć się przed ryzykiem zmian ceny ropy linia lotnicza kupuje kontrakt *swap*, na mocy, którego linia lotnicza będzie płaciła stałą cenę c za baryłkę ropy w momentach jej dostawy. Proszę wyznaczyć c (podać najbliższą odpowiedź) zakładając dla $k = 1, \dots, 6$ poniższe ceny *forward* na baryłkę ropy ($F_{0,6k}$) oraz ceny obligacji zerokuponowych o nominałach 100 i terminie wykupu za $6k$ miesięcy ($B_{0,6k}$):

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$F_{0,6k}$	61.00	62.00	62.00	63.00	65.00	67.00
$B_{0,6k}$	97.73	95.33	92.81	90.36	87.89	85.53

- A) 63.80
- B) 64.00
- C) 64.20
- D) 64.40
- E) 64.60

2. Inwestor w chwili $t = 0$ może zainwestować całe swoje środki w instrument finansowy I_1 lub też wpłacić je na lokatę dwuletnią. W przypadku wpłacenia środków na lokatę stopa zwrotu w pierwszym roku wynosi $r_1 = 5\%$, w drugim natomiast $r_2 = 3\%$. Inwestor nie ma możliwości wypłacenia środków z lokaty do końca inwestycji, czyli do chwili $t = 2$. W przypadku inwestycji w instrument I_1 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_1 . W chwili $t = 1$ środki są wypłacane i natychmiast reinwestowane – w instrument finansowy I_2 lub na rocznej lokacie o stopie zwrotu r_2 . W przypadku inwestycji w instrument I_2 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_2 .

Wektor (X_1, X_2) ma rozkład ciągły z gęstością:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 200 & \text{gdy } x_1 \in [0, 10\%], x_2 \in [0, x_1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

O wysokości X_1 inwestor dowiaduje się w chwili $t = 1$ (przed chwilą reinwestycji), o wysokości X_2 w chwili $t = 2$ (moment końca inwestycji).

Inwestor stosuje strategię inwestycyjną mającą zmaksymalizować oczekiwaną dwuletnią stopę zwrotu. Stopa ta jest najbliższa wartości:

- A) 8.1%
- B) 8.7%
- C) 9.4%
- D) 10.0%
- E) 10.6%

3. Za jednorazową składkę klient wykupił od firmy ABC sześcioletnią polisę, która gwarantuje mu:

- wypłatę kwoty 6000, na koniec 6-tego roku inwestycji lub
- wypłatę kwoty $1000 \cdot k$ w przypadku rezygnacji na koniec k -tego roku inwestycji, dla $k = 1, \dots, 5$.

Firma ABC szacuje roczne prawdopodobieństwo rezygnacji klienta na 10% (rezygnacja może nastąpić jedynie na koniec okresów $k = 1, \dots, 5$.)

Firma ABC stosuje następującą strategię zarządzania aktywami i pasywami:

- na początku inwestycji (początek roku $k = 1$), za kwotę a_1 firma kupuje obligacje zerokuponowe $B_1(0)$ oraz $B_2(0)$, przy czym wolumen obligacji każdego typu dobrany jest tak, aby ich wartość rynkowa była równa wartości oczekiwanej ciągu płatności wynikających z polisy oraz aby *duration* portfela obligacji była równa *duration* ciągu oczekiwanych płatności wynikających z polisy,
- na początku roku $k = 3$, o ile klient nie zrezygnował do tego czasu, firma sprzedaje obligacje $B_1(0)$ oraz $B_2(0)$ po cenie rynkowej, otrzymując kwotę b_3 , a następnie kupuje świeżo wyemitowane obligacje $B_1(2)$ oraz $B_2(2)$ za kwotę a_3 , tak, aby ich wartość rynkowa była równa wartości oczekiwanej ciągu płatności wynikających z dalszego trwania polisy oraz aby *duration* portfela obligacji była równa *duration* ciągu oczekiwanych płatności wynikających z dalszego trwania polisy,
- na początku roku $k = 5$, o ile klient nie zrezygnował do tego czasu, firma powtarza procedurę z $k = 3$, otrzymując kwotę b_5 i płacąc a_5 .

Dla $k = 1, 3, 5$ obligacje $B_1(k)$ są obligacjami 3-letnimi o nominale 100, a obligacje $B_2(k)$ są obligacjami 7-letnimi o nominale 100. Wiedząc, że m -letnia stopa spot, na początku roku k wynosi:

$$s(k, m) = 2\% + \frac{k}{200} + \frac{m}{300}, k = 1, \dots, 6, m = 1, \dots, 7$$

i klient nie zrezygnował do końca polisy proszę wyznaczyć $b_3 + b_5 - (a_1 + a_3)$ (podać najbliższą wartość):

- A) 500
- B) 700
- C) 900
- D) 1 100
- E) 1 300

4. Rozważmy zapadający za 2 lata instrument o następującej funkcji wypłaty:

$$w(S_2) = \begin{cases} 0 \text{ PLN}, & S_2 > 100 \text{ PLN}, \\ 100\,000 \text{ PLN}, & S_2 \leq 100 \text{ PLN}, \end{cases}$$

gdzie S_2 oznacza cenę niepłacącej dywidendy akcji S na moment zapadalności tego instrumentu. Przy standardowych założeniach modelu Blacka-Scholesa wycenić ten instrument wiedząc, że:

- roczna intensywność oprocentowania wynosi 0.05,
- roczna zmienność ceny akcji wynosi 30%,
- cena akcji w momencie wyceny instrumentu wynosi 120 PLN.

Wartość instrumentu przy podanych założeniach wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 17 000 PLN
- B) 30 000 PLN
- C) 33 000 PLN
- D) 61 000 PLN
- E) 67 000 PLN

-
5. Niech dany będzie nieskończony ciąg rent wieczystych. Renta wieczysta a_N startująca w roku $N \geq 1$ wypłaca kwotę $\frac{1}{k^2}$ na koniec każdego roku $k \geq N$. Roczna stopa dyskontowa $i = 5\%$. Niech $PV(a_N)$ oznacza wartość obecną renty a_N wyznaczoną na początek pierwszego roku. Suma wartości obecnych wszystkich rent a_N , czyli $\sum_1^{+\infty} PV(a_N)$, wynosi (podać najbliższą odpowiedź):
- A) 20
 - B) 10
 - C) 5
 - D) 3
 - E) 1

6. Rozważmy rynek, na którym w chwili 1 możliwe są jedynie dwa stany: I lub II. Na tym rynku dostępne są dwa aktywa A i B oraz dwa aktywa jednostkowe. Funkcje wypłaty wymienionych aktywów, w zależności od stanu, w którym znajduje się rynek podaje tabela:

Wypłata	Aktywo A	Aktywo B	Aktywo jednostkowe stanu I	Aktywo jednostkowe stanu II
Stan I	4	6	1	0
Stan II	2	x	0	1

Ponadto, wiadomo, że:

- w chwili 0 cena aktywa A wynosi 3, a cena aktywa B wynosi 4,
- jednookresowa stopa wolna od ryzyka wynosi $\frac{1}{9}$,
- rynek nie dopuszcza arbitrażu.

Przy takich założeniach wartość wypłaty aktywa B w stanie II opisanego rynku (oznaczona w powyższej tabeli przez x), wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 0,
- B) $\frac{3}{4}$,
- C) 1
- D) $\frac{4}{3}$,
- E) 3

7. Kredyt o wartości S będzie spłacony w ciągu 20 lat, ratami płatnymi w odstępach rocznych, przy czym wiadomo, że:

- pierwsza rata o wartości R zostanie zapłacona po upływie dwóch lat od dnia przyznania kredytu,
- każda z następnych rat zwiększa się w porównaniu do poprzedniej o X , aż do osiągnięcia maksymalnej wysokości, po czym kolejne raty zmniejszają się o X i osiągają na końcu 10 roku ponownie wartość R ,
- w następnych 5 latach, każda rata jest równa poprzedniej,
- w ostatnich 5 latach każda rata jest większa od poprzedniej o tę samą wartość,
- rata zapłacona na końcu 20 letniego okresu spłaty jest równa maksymalnej racie zapłaconej w okresie pierwszych 10 lat,
- stopa oprocentowania wynosi j , a odpowiadający jej czynnik dyskontowy równy jest v .

Wskazać, który z poniższych wzorów wyraża wartość X .

$$A) \frac{S \cdot j - R \cdot (v - v^6 + v^{10} - v^{20})}{v \cdot a_{\overline{5}|} - v^6 \cdot a_{\overline{4}|} + 0,8 \cdot v^{14} \cdot a_{\overline{6}|} - 4,8 \cdot v^6 + v^{10} - 2 \cdot v^{20}}$$

$$B) \frac{S \cdot j - R \cdot (v - v^{20})}{v \cdot a_{\overline{5}|} - v^6 \cdot a_{\overline{4}|} + 0,8 \cdot v^{14} \cdot a_{\overline{6}|} - 2 \cdot v^6 + v^{10} - 4,8 \cdot v^{20}}$$

$$C) \frac{S \cdot j - R \cdot (v - v^6 + v^{10} - v^{20})}{v \cdot a_{\overline{5}|} - v^6 \cdot a_{\overline{4}|} + 2 \cdot v^{14} \cdot a_{\overline{6}|} - 0,8 \cdot v^6 + v^{10} - 4,8 \cdot v^{20}}$$

$$D) \frac{S \cdot j - R \cdot (v - v^{20})}{v \cdot a_{\overline{5}|} - v^6 \cdot a_{\overline{4}|} + 2 \cdot v^{14} \cdot a_{\overline{6}|} - 4,8 \cdot v^6 + v^{10} - 0,8 \cdot v^{20}}$$

$$E) \frac{S \cdot j - R \cdot (v - v^6 + v^{10} - v^{20})}{v \cdot a_{\overline{5}|} - v^6 \cdot a_{\overline{4}|} + 4,8 \cdot v^{14} \cdot a_{\overline{6}|} - 2 \cdot v^6 + v^{10} - 0,8 \cdot v^{20}}$$

8. Zakład ubezpieczeń wyceniając rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe ustalił, że z ciężących na nim w chwili obecnej zobowiązań wynikną następujące świadczenia:

- świadczenie jednorazowe w kwocie 100 000 płatne po 5 latach,
- świadczenie jednorazowe w kwocie 150 000 płatne po 10 latach,
- 20-letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku, przy czym pierwsza rata wynosi 24 000, a każda następna jest większa od poprzedniej o 1 200.

Zakład ubezpieczeń zamierza zapewnić pokrycie powyższych zobowiązań następującymi aktywami:

- obligacje 20-letnie z kuponem rocznym w wysokości 7% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 10 000,
- obligacje 5-letnie z kuponem rocznym w wysokości 4% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 5 000.

Jaki procent środków przeznaczonych na pokrycie powyższych zobowiązań zakład ubezpieczeń powinien zainwestować w obligacje 5-letnie, aby przy stopie procentowej 5% *duration* aktywów była równa *duration* zobowiązań? Podać najbliższą wartość.

- A) 38%
- B) 40%
- C) 42%
- D) 44%
- E) 46%

9. Warunki spłaty kredytu w okresie 25 lat, ratami płatnymi na końcu każdego roku są następujące:

- pierwsza rata równa jest p , a każda następna, w okresie pierwszych 15 lat jest mniejsza od poprzedniej o q ,
- w okresie ostatnich 10 lat każda rata jest większa od poprzedniej o 7%,
- oprocentowanie kredytu wynosi 4%.

Wiadomo, że suma odsetek zapłaconych w racie 5 i racie 20 stanowi 60% wartości sumy spłat kapitałów w tych ratach. Obliczyć ile wynosi stosunek p/q . Podać najbliższą wartość.

- A) 30
- B) 32
- C) 34
- D) 36
- E) 38

10. Renta wieczysta wypłaca na początku pierwszego roku kwotę 20 000, a następnie na końcu każdego roku n kwotę $20\,000 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Niech $R(v)$ oznacza wartość obecną tej renty obliczoną przy zastosowaniu czynnika dyskontującego v . Jaka jest wartość v , jeżeli wiadomo, że $R(v) = 100\,000$? Podać najbliższą wartość.

- A) 0.957
- B) 0.958
- C) 0.959
- D) 0.960
- E) 0.961

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	E	
3	B	
4	B	
5	D	
6	D	
7	B	
8	A	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.