

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXIV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważamy aktywa A i B o identycznej cenie. Inwestor rozważa następujące scenariusze w zakresie zwrotu z inwestycji w aktywa A i B :

Scenariusz	Prawdopodobieństwo	Zwrot z aktywa A	Zwrot z aktywa B
I	0.3	20%	5%
II	0.2	5%	10%
III	0.5	-10%	20%

Inwestor inwestuje $p\%$ posiadanych środków w aktywo A , a pozostałe środki w aktywo B , wyznaczając $p \in [0,100]$ w taki sposób, aby wariancja stopy zwrotu dla tak skonstruowanego portfela była minimalna. Wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu przy tak skonstruowanym portfelu. Podać najbliższą wartość.

- A) 8.6%
- B) 9.6%
- C) 10.6%
- D) 11.6%
- E) 12.6%

2. Na rynku Blacka-Scholesa w chwili $t = 0$ dostępna jest opcja wyboru \mathcal{O} (*chooser option*) na akcję \mathcal{A} , niepłacącą dywidendy. Cena opcji \mathcal{O} w chwili $t = 0$ wynosi 10 PLN. Nabywca opcji \mathcal{O} w chwili $t = 1$ ma prawo zdecydować, czy chce, aby była to:

- a) europejska opcja sprzedaży na akcję \mathcal{A} , czy też
- b) europejska opcja kupna na akcję \mathcal{A} ,

realizowana w chwili $t = 2$ z ceną wykonania 100 PLN. Przez $C_t(\mathcal{A}, T, K)$ oznaczmy cenę w chwili $t < T$ europejskiej opcji kupna na akcję \mathcal{A} o terminie wykonania T i cenie wykonania K . Jeżeli wiemy, że cena akcji \mathcal{A} w chwili $t = 0$ wynosi 97, stopa wolna od ryzyka wynosi 0 oraz $C_0(\mathcal{A}, 1, 100) = 3$ PLN, to $C_0(\mathcal{A}, 2, 100)$ równe jest (podać najbliższą wartość):

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

3. Wiadomo, że obecna ($t = 0$) cena akcji \mathcal{S} niepłacącej dywidendy wynosi 18.50 PLN. W przeciągu 6 miesięcy cena akcji wzrośnie do kwoty 22.50 PLN lub spadnie do kwoty 15 PLN. Roczna intensywność oprocentowania (model ciągły) jest zadana na poziomie 6%. Obecna cena europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję \mathcal{S} , o cenie wykonania 20 PLN i terminie wykonania 6 miesięcy, wynosi 1.55 PLN. Zakładając idealną podzielność aktywów wskaż, które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe:
- A) Nie ma możliwości wypracowania zysku arbitrażowego.
 - B) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.24 PLN zajmując długą pozycję w opcji kupna, sprzedając 0.333 akcji \mathcal{S} i zajmując długą pozycję w gotówce w kwocie 4.852 PLN.
 - C) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.24 PLN zajmując krótką pozycję w opcji kupna, kupując 0.333 akcji \mathcal{S} i zajmując krótką pozycję w gotówce w kwocie 4.852 PLN.
 - D) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.12 PLN zajmując długą pozycję w opcji kupna, sprzedając 0.666 akcji \mathcal{S} i zajmując długą pozycję w gotówce w kwocie 10.780 PLN.
 - E) Można wypracować w chwili $t = 0$ zysk arbitrażowy w kwocie 0.12 PLN zajmując krótką pozycję w opcji kupna, kupując 0.666 akcji \mathcal{S} i zajmując krótką pozycję w gotówce w kwocie 10.780 PLN.

4. Inwestor zakupił 10-letnią obligację o nominale 100 PLN i kuponie 8% w skali roku płaconym na koniec każdego półrocza. Obligacja ma wbudowaną opcję przedłużenia (*extendable bond*) o kilku możliwych terminach wykupu w okresie przedłużenia wynoszącym 6 lat. Oznacza to, że w chwili pierwotnego momentu wygaśnięcia (10 lat) emitent może zdecydować o przedłużeniu czasu trwania obligacji, przy utrzymaniu początkowych założeń odnośnie wypłacanego kuponu. Ponadto ma on prawo wyboru momentu zapadalności (wykupu) obligacji w okresie przedłużenia. Możliwe zapadalności mogą przypadać w momentach wypłaty kuponu, przy czym nie jest możliwy wykup obligacji przed upływem pierwotnego, 10-letniego, okresu trwania, jak również, przed upływem tego okresu nie jest znana decyzja emitenta o przedłużeniu i wyborze momentu zapadalności. Wartość wykupu zależy od roku trwania obligacji, w którym nastąpi wykup (przy czym pierwszy rok trwania obligacji rozpoczyna się w momencie emisji $t = 0$ i każdy n -ty rok trwania obligacji rozpoczyna się po wypłacie kuponu należnego za rok $n - 1$):

Rok trwania obligacji	10	11	12	13	14	15	16
Wartość wykupu (PLN)	100.00	118.50	118.50	98.00	98.00	142.00	142.00

Jaką największą cenę może zapłacić inwestor w momencie zakupu ($t = 0$), jeśli chce on osiągnąć stopę dochodowości obligacji co najmniej 12% w skali roku (przy dyskretnej kapitalizacji zgodnej z częstotliwością wypłaty kuponu)? Podać najbliższą wartość.

- A) 72.80 PLN
- B) 78.34 PLN
- C) 79.47 PLN
- D) 80.57 PLN
- E) 81.05 PLN

5. Bank oferuje produkt oszczędnościowy, który przy możliwości inwestowania w pewien indeks akcji I jednocześnie oferuje minimalną, gwarantowaną wysokość środków w momencie wygaśnięcia. Produkt ten jest jednorocznym kontraktem, który klientowi lokującemu kwotę K wypłaca za rok kwotę:

$$K \cdot \delta \cdot \max \left[\frac{I(1)}{I(0)}, 1 \right],$$

gdzie: $I(0)$ oznacza wartość indeksu I w chwili zakupu produktu, $I(1)$ wartość tego indeksu za rok, a δ pewną liczbę z przedziału $[0, +\infty)$. Ponadto wiadomo, że w momencie zakupu produktu, bank pobiera marżę w wysokości 1% lokowanej kwoty. Przy następujących parametrach wyznaczyć liczbę δ , tak, aby zysk banku na tym kontrakcie był równy pobranej marży:

- indeks I zawiera wypłaty dywidend, czyli skonstruowany jest przy założeniu, że dywidendy są natychmiast reinwestowane w ten sam indeks,
- $I(0) = 1000$,
- w chwili 0 cena europejskiej opcji kupna na indeks I z ceną wykonania 1000 i terminem wykonania za rok wynosi 120.50,
- roczna intensywność oprocentowania wynosi 5%.

Podać najbliższą odpowiedź:

- A) 100.0%
- B) 93.3%
- C) 92.4%
- D) 89.7%
- E) 88.8%

6. *Duration* renty $(Da)_{\overline{5}|}$ wynosi 2.26, a renty $(Ia)_{\overline{5}|}$ wynosi 3.59. Stała stopa procentowa w ujęciu rocznym wynosi i . Przy tych założeniach *duration* renty $a_{\overline{5}|}$ wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 2.98
- B) 2.96
- C) 2.94
- D) 2.92
- E) 2.90

7. Kredyt o wartości K jest spłacany 30 ratami płatnymi na końcu kolejnych lat, w sposób następujący:

- w okresie pierwszych 20 lat raty tworzą malejący ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym P i różnicy $(-)Q$,
- w okresie ostatnich 10 lat raty tworzą rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $P - 18Q$ i różnicy Q ,
- oprocentowanie kredytu wynosi 5%.

Wiedząc, że odsetki zapłacone na końcu 15 roku stanowią 50% raty, obliczyć ile wynosi stosunek K/Q . Podać najbliższą wartość.

- A) 280
- B) 285
- C) 290
- D) 295
- E) 300

8. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku $2n + 2$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, wynosi $(n + 1) \cdot (2n + 3)$. Stopa oprocentowania jest równa 1%.

Niech R oznacza zdyskontowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, natomiast M niech będzie maksymalną wartością zdyskontowanej raty. Obliczyć ile wynosi różnica $R - M$. Podać najbliższą wartość.

- A) 507 302
- B) 507 304
- C) 507 306
- D) 507 308
- E) 507 310

9. Zasady spłacania pożyczki o wartości K , są następujące:

- 25 rat płaconych w odstępach rocznych,
- pierwsza rata zostanie zapłacona po upływie roku od daty otrzymania pożyczki,
- pierwszych 10 rat spełnia warunek, iż począwszy od drugiej raty, każda jest o 1 mniejsza od poprzedniej,
- w przypadku następnych 5 rat, każda rata jest większa od poprzedniej o 2,
- ostatnie 10 rat spełnia warunek, iż każda rata jest o 10% mniejsza od poprzedniej,
- stopa oprocentowania wynosi i .

Wskazać, który z poniższych wzorów wyraża wielkość pierwszej raty.

$$\text{A) } \frac{K \cdot i + a_{\overline{10}|i} - v^{10} \cdot (2 \cdot a_{\overline{5}|i} - 3) - v^{15} \cdot (3 + 0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{i + 0,1})}{1 + v^{15} \cdot (0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{i + 0,1} + 1)}$$

$$\text{B) } \frac{K \cdot i + a_{\overline{10}|i} - v^{10} \cdot (3 \cdot a_{\overline{5}|i} + 2) + v^{15} \cdot (3 - 0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{1 - 0,9 \cdot v})}{1 + v^{15} \cdot (0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{1 - 0,9 \cdot v} - 1)}$$

$$\text{C) } \frac{K \cdot i + a_{\overline{10}|i} - v^{10} \cdot (2 \cdot a_{\overline{5}|i} + 3) + v^{15} \cdot (3 + 0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{1 - 0,9 \cdot v})}{1 + v^{15} \cdot (0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{1 - 0,9 \cdot v} - 1)}$$

$$\text{D) } \frac{K \cdot i + a_{\overline{10}|i} - v^{10} \cdot (2 \cdot a_{\overline{5}|i} + 3) + v^{15} \cdot (3 - 0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{i + 0,1})}{1 + v^{15} \cdot (0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{i + 0,1} - 1)}$$

$$\text{E) } \frac{K \cdot i + a_{\overline{10}|i} - v^{10} \cdot (3 \cdot a_{\overline{5}|i} + 2) + v^{15} \cdot (3 - 0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{1 - 0,9 \cdot v})}{1 + v^{15} \cdot (0,9 \cdot i \cdot \frac{1 - (0,9 \cdot v)^{10}}{i + 0,1} - 1)}$$

10. Kredyt oprocentowany na poziomie 6% będzie spłacany w okresie 32 lat ratami płatnymi na końcu roku.

W czasie pierwszych 20 lat, spłaty kredytu dokonywane będą w ratach o wartości R , w odstępach 2-letnich, począwszy od końca drugiego roku.

W ostatnich 12 latach kredyt będzie spłacany w ratach o wartości S , płatnych w odstępach 3-letnich, począwszy od końca trzeciego roku tego okresu.

Wiadomo, że kredyt można spłacić ratami płatnymi w tych samych terminach zmieniając ich wartość w sposób następujący:

- w okresie pierwszych 20 lat pierwsza rata jest równa R , a każda następna jest mniejsza od poprzedniej o $0.1 \cdot R$,
- pozostałe raty są zwiększone o 25% w stosunku do wartości pierwotnej.

Wiadomo również, że suma wszystkich zapłaconych odsetek w pierwotnym planie spłaty będzie równa 127 326. Obliczyć wartość S . Podać najbliższą wartość.

- A) 34 000
- B) 34 500
- C) 35 000
- D) 35 500
- E) 36 000

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	C	
3	C	
4	A	
5	C	
6	E	
7	B	
8	A	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.