Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Matematyka finansowa,

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

W dniu dzisiejszym cena akcji spółki Z wynosi 147. Dostępna jest europejska opcja kupna o cenie wykonania 150 i czteromiesięcznym terminem wygaśnięcia. Cenę akcji można zapisać jako funkcję $S_T\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$, którą opisuje następująca formuła:

$$S_T(\omega) = \begin{cases} S^u = 165, & \text{gdy } \omega = \omega_1, \\ S^d = 120, & \text{gdy } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Widząc, że cena akcji jest zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, której prawdopodobieństwo wzrostu wynosi:

$$\mathbf{P} = (\{\omega_1\}) = 0.3,$$

wyznacz różnicę między ceną arbitrażową opcji a wartością oczekiwaną jej wypłaty. Zakłada się, że oprocentowanie czteromiesięcznych depozytów wynosi 4%.

(A) 6,21

(B) 8,65

(C) 10,09

(D) 10,54

(E) 11,54

Zadanie 2.

Inwestor A i inwestor B są uczestnikami rynku kontraktów forward. Inwestor A zajmuje pozycję w 12-miesięcznym kontrakcie forward na 100 akcji spółki Z. Cena rozliczenia kontraktu wynosi 12000 PLN a aktualna cena akcji 110 PLN. Z kolei inwestor B zajmuje długą pozycję w 12-miesięcznym kontrakcie forward na 50 akcji spółki Y, którego cena rozliczenia wynosi 11000 PLN a aktualna cena akcji 250 PLN. Spółka Z wypłaca dywidendę w sposób ciągły według stopy d=4% w skali rocznej, natomiast akcjonariusze spółki Y otrzymują dywidendę w wysokości D odpowiednio za 6 oraz 12 miesięcy. Zakłada się, że 12-miesięczna wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 5%, natomiast 6-miesięczna 4,8% w skali roku i stosowana jest kapitalizacja ciągła.
Przy jakiej wielkości dywidendy (D) zysk arbitrażowy obu inwestorów będzie jednakowy? Podaj najbliższą wartość.

(A) 12,10

(B) 23,40

(C) 24,20

(D) 29,70

(E) 57,30

Zadanie 3.

Czynniki oprocentowania lokaty w kolejnych czterech kwartałach są niezależnymi zmiennymi losowymi i każda z nich ma rozkład $\Lambda(\mu_j, \sigma_j^2)$, j=1, 2, 3, 4 a wartość oczekiwana zmiennej losowej X określona jest formułą $E(X) = exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$.

Wiedząc, że:

i. $\Lambda(\mu_1, 0.03^2)$, $\Lambda(0.06, \sigma_2^2)$, $\Lambda(0.05, \sigma_3^2)$, $\Lambda(\mu_4, 0.04^2)$,

ii. Rozkład rocznego czynnika oprocentowania $\Lambda(0.255, 0.0033)$,

iii. Wartość oczekiwana czynnika oprocentowania w czwartym kwartale wynosi 1.0787,

iv. $\sigma_2 = \sigma_3$.

Podaj wartość rocznej efektywnej stopy oprocentowania lokaty, wiedząc, że odpowiada ona wartości oczekiwanej rocznego czynnika oprocentowania.

(A) 25,83%

(B) 26,93%

(C) 28,02%

(D) 29,26%

(E) 31,24%

Zadanie 4.

Cenę trzyletniej obligacji, z której na koniec każdego roku wypłacane są stałe kupony w wysokości θ opisuje równanie:

$$C_t = \boldsymbol{E_Q}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t+i)} \theta \cdot FV + \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t+i)} FV | \mathcal{F}_t\right)$$

Wiedząc, że krzywa dochodowości wyrażona jest za pomocą formuły:

$$Y(0,T) = -0{,}02T^2 + 0{,}03T + 0{,}1$$

a bieżąca cena obligacji jest równa FV i występuje kapitalizacja ciągła, wyznacz wysokość stałego kuponu θ wyrażonego jako procent wartości nominalnej FV. Podaj najbliższą wartość procentu.

(A) 0.89%

(B) 0.91%

(C) 0.96%

(D) 1.09%

(E) 1.17%

Zadanie 5.

W dniu 7.04.2017 kurs opcji kupna na WIG20 z kursem wykonania 2300 na GPW w Warszawie wynosił 87. Termin wygaśnięcia opcji to 15.09.2017. Inwestor w chwili t=0 kierując się możliwością osiągnięcia zysku arbitrażowego zajmuje pozycję w 100 opcjach kupna. W odniesieniu do portfela π stosuje strategię zabezpieczającą delta. Skład portfela modyfikowany jest odpowiednio dla t=1, 2, 3, 4 dla następujących kursów indeksu WIG20:

t	Dzień notowania	Kurs WIG20	Δ_C
0	07.04.17	2248,33	?
1	09.06.17	2330,72	0,63
2	14.07.17	2350,43	?
3	18.08.17	2359,87	0,75
4	15.09.17	2498,32	?

Zakłada się brak kosztów i wypłaty dywidendy oraz stałą stopę procentową wolną od ryzyka na poziomie 4% w skali roku. Odchylenie standardowe wyznaczone dla tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu WIG20 wyniosło 0,0225, natomiast dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1705) = 0,57 dla t=0.

Wiedząc, że Δ portfela dla t=3 była 40% większa niż Δ portfela dla t=2, wskaż pozycję, którą zajął inwestor w chwili t=0 oraz modyfikacje składu portfela odpowiednio dla t=1, 2, 3, 4.

(A) pozycja krótka, $\Delta_\pi = \{50;\ 53{,}5;\ 75; 0\}$

(B) pozycja długa, $\Delta_\pi = \{13;\ 53{,}5;\ 75;\ 0\}$

(C) pozycja krótka, $\Delta_\pi = \{50;\ 53{,}5;\ 75; 0\}$

(D) pozycja długa, $\Delta_\pi = \{50;\ 5;\ 7; 77\}$

(E) pozycja krótka, $\Delta_\pi = \{6;\ 5; 7; 75\}$

Zadanie 6.

Ceny akcji S_T charakteryzuje rozkład logarytmiczno-normalny, dla którego:

$$lnS_T \sim \Phi\left[lnS + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma\sqrt{T}\right]$$

gdzie:

S – aktualna cena akcji,

μ – oczekiwana stopa zwrotu z akcji,

σ – zmienność ceny akcji.

Prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych 3 trzech miesięcy cena akcji znajdzie się w przedziale od 30 do 45 wynosi 95% a aktualna cena akcji jest na poziomie 35. Wyznacz oczekiwaną stopę zwrotu z akcji. Podaj najbliższą wartość.

(A) 18,0%

(B) 19,5%

(C) 20,0%

(D) 21,5%

(E) 22,5%

Zadanie 7.

Proces cen dla instrumentu finansowego X opisany jest na drzewie dwumianowym, dla którego:

i. schemat losowy opisany jest miarą probabilistyczną $\mathbf{P} = \{p_i\}$;

ii. warunkowa wartość oczekiwana wynosi: $\mathbf{E_P}(X|\mathcal{F}_0) = 38$;

iii. $$\mathbf{E_P}(X|\mathcal{F}_2) = \begin{cases} 30 \text{ dla } \mathcal{F}_2 = \{1,2,4\} \\ 50 \text{ dla } \mathcal{F}_2 = \{1,2,5\} \cup \{1,3,5\} \\ 70 \text{ dla } \mathcal{F}_2 = \{1,3,6\} \end{cases};$$

iv. dla t = 0, 1, 2 występują odpowiednio filtracje: $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$.

Wyznacz prawdopodobieństwo p_i.

(A) 0,1

(B) 0,15

(C) 0,2

(D) 0,25

(E) 0,3

Zadanie 8.

Renta wieczysta wypłaca na końcu roku n kwotę $n \cdot (2n+1)$, gdzie n = 1, 2, 3 ….
Stopa oprocentowania jest równa 3,5%.
Niech S oznacza zdyskontowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, natomiast T niech będzie sumą dwóch największych wartości zdyskontowanych rat. Oblicz, ile wynosi suma S+T.
Podaj najbliższą wartość.

(A) 100 935

(B) 100 936

(C) 100 937

(D) 100 938

(E) 100 939

Zadanie 9.

Kredyt o wartości K jest spłacony w ciągu 20 lat, ratami płatnymi w odstępach rocznych na końcu każdego roku, przy czym wiadomo, że:

- stopa oprocentowania wynosi 4%,
- pierwsza rata zostanie zapłacona po upływie roku od dnia przyznania kredytu,
- w okresie pierwszych 10 lat wszystkie raty są sobie równe,
- w okresie ostatnich 10 lat każda rata jest mniejsza od poprzedniej o 500,
- stosunek sumarycznej kwoty odsetek zapłaconych w całym okresie spłaty kredytu do sumarycznej kwoty odsetek zapłaconych w pierwszych 10 latach spłaty wynosi 1,322.

Oblicz ile wynosi K. Podaj najbliższą wartość.

(A) 120 000

(B) 130 000

(C) 140 000

(D) 150 000

(E) 160 000

Zadanie 10.

Pożyczka o wartości L zaciągnięta na początku roku, jest spłacana zgodnie z następującymi zasadami:

- 25 rat płaconych na końcu kolejnych lat, przy czym pierwsza rata jest płacona po upływie roku od daty otrzymania pożyczki,
- pierwszych 10 rat spełnia warunek, iż każda następna jest o 1% mniejsza od poprzedniej,
- w przypadku następnych 5 rat, każda rata jest większa od poprzedniej o 5,
- ostatnie 11 rat ma jednakową wysokość,
- stopa oprocentowania wynosi i, a odpowiadający jej czynnik dyskontowy równy jest v.

Wskaż, który z poniższych wzorów wyraża wielkość pierwszej raty.

(A) $$\frac{25\cdot v^{20}-5\cdot v^{15}+5\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5}|})+L\cdot i}{(v^{5}-v^{25})\cdot 0{,}99^{9}+v\cdot i\cdot\dfrac{1-(0{,}99\cdot v)^{10}}{1-0{,}99\cdot v}}$$

(B) $$\frac{25\cdot v^{25}+5\cdot v^{15}-5\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5}|})+L\cdot i}{(v^{10}-v^{25})\cdot 0{,}99^{9}+v\cdot i\cdot\dfrac{1-(0{,}99\cdot v)^{10}}{1-0{,}99\cdot v}}$$

(C) $$\frac{25\cdot v^{20}+5\cdot v^{15}+5\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5}|})+L\cdot i}{(v^{10}-v^{20})\cdot 0{,}99^{9}+v\cdot i\cdot\dfrac{1-(0{,}99\cdot v)^{10}}{1-0{,}99\cdot v}}$$

(D) $$\frac{25\cdot v^{25}-5\cdot v^{15}-5\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5}|})+L\cdot i}{(v^{5}-v^{20})\cdot 0{,}99^{9}+v\cdot i\cdot\dfrac{1-(0{,}99\cdot v)^{10}}{1-0{,}99\cdot v}}$$

(E) $$\frac{25\cdot v^{20}-5\cdot v^{15}+5\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5}|})+L\cdot i}{(v^{10}-v^{25})\cdot 0{,}99^{9}+v\cdot i\cdot\dfrac{1-(0{,}99\cdot v)^{10}}{1-0{,}99\cdot v}}$$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	A	
3	D	
4	D	
5	E	
6	D	
7	C	
8	E	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.