

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i
majątkowych**

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q , zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q , zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q . Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $\text{var}(Q) > 0$.

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Łąduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi $20/80$, w klasie drugiej $9/80$, zaś w klasie trzeciej $51/80$. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.

Wobec tego $\text{var}(Q)$ wynosi:

- (A) $2/80$
- (B) $3/80$
- (C) $4/80$
- (D) $5/80$
- (E) $6/80$

Zadanie 2.

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$U_n = u + X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- X_1, X_2, X_3, \dots są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach.

Zmienna X_1 ma rozkład geometryczny przesunięty:

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 = -1) &= 1 - q, \\ \Pr(X_1 = 0) &= (1 - q)q, \\ \Pr(X_1 = 1) &= (1 - q)q^2, \\ \Pr(X_1 = 2) &= (1 - q)q^3, \dots\end{aligned}$$

Niech $N = \min\{n: U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.

Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $q = 3/7$, oraz $u = 7/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $E(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

- (A) 20
- (B) 18
- (C) 16
- (D) 14
- (E) 12

Wskazówka: zauważ, że przyrosty nadwyżki są liczbami całkowitymi, a przyrost ujemny może wynieść jedynie -1.

Zadanie 3.

Zmienne N, M_1, M_2, M_3, \dots , powiązane ze zmienną K zależnością: $K = M_1 + \dots + M_N$, spełniają założenia rozkładu złożonego.

Zmienna M_1 ma rozkład dwumianowy:

$$\Pr(M_1 = 1) = Q, \quad \Pr(M_1 = 0) = P, \quad Q \in (0,1), \quad P = 1 - Q;$$

zaś zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} (1-q)^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Przyjmujemy następującą interpretację zmiennych zadania:

- N - to liczba szkód, do których doszło w ciągu roku, z czego:
 - $(N - K)$ - to liczba szkód, które zgłoszone zostały przed końcem roku,
 - K - to liczba szkód zaszłych, które nie zostały w ciągu roku zgłoszone.

Jeśli parametry zadania wynoszą:

- $r = 10$;
- $q = 2/3$;
- $Q = 1/4$,

to warunkowa wartość oczekiwana:

- $E(K|N - K = m)$

dana jest wzorem:

- (A) $\frac{m}{3}$
- (B) $2 + \frac{m}{5}$
- (C) $3 + \frac{2m}{15}$
- (D) $4 + \frac{m}{15}$
- (E) 5

Zadanie 4.

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości X_1, X_2, X_3, X_4 . Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne. Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

- (A) 19/48
- (B) 21/48
- (C) 23/48
- (D) 25/48
- (E) 27/48

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$,
- rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{8} \exp\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{32} x \exp\left(-\frac{x}{4}\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 800$.

Wobec tego współczynnik dopasowania R wynosi:

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{16}$

(B) $\frac{3-\sqrt{5}}{16}$

(C) $\frac{5-3\sqrt{2}}{28}$

(D) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{5+3\sqrt{2}}{28}$

Zadanie 6.

X oraz Y to zagregowane wartości szkód dwóch rodzajów z tego samego ryzyka, których łączny rozkład zależy od wartości parametru ryzyka Θ . Rozkład ten ma następujące charakterystyki:

$$\text{cov}(X, Y|\Theta) = 2\Theta$$

$$E(X|\Theta) = 3\Theta$$

$$E(Y|\Theta) = \Theta$$

podczas gdy zróżnicowanie parametru Θ w populacji ryzyk daje się opisać rozkładem logarytmiczno-normalnym takim, że $\ln(\Theta)$ ma rozkład normalny o parametrach

$$(\mu, \sigma^2) = \left(0, \frac{1}{10}\right)$$

$\text{cov}(X, Y)$ wynosi w przybliżeniu (wybierz przybliżenie najlepsze):

- (A) 2.00
- (B) 2.15
- (C) 2.30
- (D) 2.45
- (E) 2.60

Zadanie 7.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1) , (λ_2, F_2) , oraz (λ_3, F_3) .

Wartości parametrów częstotliwości to $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3 , dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	1	0	4/10	1
2	1/2	0	3/10	1
3	1/2	0	9/10	1

$\Pr(X = 3)$ wynosi:

- (A) $\frac{1}{2} \exp(-2)$
- (B) $\frac{2}{3} \exp(-2)$
- (C) $\frac{5}{6} \exp(-2)$
- (D) $\exp(-2)$
- (E) $\frac{7}{6} \exp(-2)$

Zadanie 8.

Wyjściowy portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla pojedynczego ryzyka ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ .

S oznacza łączną wartość szkód z tego portfela. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G tak, aby:

$$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01,$$

przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.

Dla naszego portfela wyjściowego mamy:

$$n = 1000, \quad \mu = 10, \quad \sigma = 10.$$

Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych n_1 ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych n ryzyk z portfela wyjściowego.

Ich charakterystyki to:

$$\mu_1 = 10, \quad \sigma_1 = 14,$$

Jednakże warunkiem objęcia „nowych” ryzyk jest zaoferowanie pokrycia za składkę w tej samej wysokości G , co dla „starych” ryzyk. Niech S_1 oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich n_1 mamy:

$$\Pr(S + S_1 > (n + n_1) \cdot G) \leq 0.01 ?$$

(Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej)

- (A) $n_1 \geq 0$
- (B) $n_1 \geq 103$
- (C) $n_1 \geq 250$
- (D) $n_1 \leq 103$
- (E) $n_1 \leq 250$

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, który startuje w czasie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza czas zajścia n -tej szkody, przy czym jednostką pomiaru czasu jest rok. Szkody numerujemy według kolejności zajścia, zachodzi więc $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$.

Niech teraz $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k$ oznacza średni czas zajścia pierwszych n szkód (zmienna ta jest oczywiście określona, o ile $n > 0$).

Wariancja średniego czasu zajścia pierwszych pięciu szkód, pod warunkiem, że w ciągu pierwszego roku doszło właśnie do pięciu szkód:

$$\text{var}(\bar{T}_5 | T_5 \leq 1 < T_6)$$

wynosi:

- (A) 1/60
- (B) 1/50
- (C) 1/45
- (D) 1/40
- (E) 1/30

Zadanie 10.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości równym $\lambda = \ln(3)$.

Wartość każdej ze szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & \text{jeżeli } N > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Mediana warunkowego rozkładu zmiennej M , pod warunkiem że wystąpiła co najmniej jedna szkoda, a więc taka liczba y , dla której:

$$\Pr((M < y | N > 0) = \frac{1}{2}$$

Wynosi:

- (A) $\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$
- (B) $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$
- (C) $\frac{\ln(5/2)}{\ln(3/2)}$
- (D) $\frac{\ln(2)}{\ln(3/2)}$
- (E) $\frac{\ln(5/2)}{\ln(2)}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	E	
2	C	
3	B	
4	D	
5	B	
6	D	
7	E	
8	A	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.