Zadanie 1.

O rozkładzie pewnego ryzyka X posiadamy następujące informacje:

- znamy oczekiwaną wartość nadwyżki ponad 20:

$E\left[(X-20)_+\right]=8$

- oraz znamy następujące charakterystyki dotyczące przedziału $\left(10, 20\right]$:

$$\Pr(X \le 20) = \frac{3}{4}$$

$$\Pr(X \le 10) = \frac{1}{4}$$

$$E\left(X \middle| 10 < X \le 20\right) = 13$$

Wobec tego oczekiwana wartość nadwyżki ponad 10:

$$E\left[(X-10)_+\right],$$

wynosi:

(A) 11.5

(B) 12

(C) 12.5

(D) 13

(E) 13.5

Zadanie 2.
Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci:

$$u(x) = \ln(x)$$

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w. Jedna trzecia tego majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q. Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wypłacające w razie szkody odszkodowanie $(1 - \alpha)\frac{w}{3}$, za cenę równą wartości oczekiwanego odszkodowania pomnożonej przez $(1 + \theta)$. Przy założeniach, że:

- $q = 10\%, \theta = 20\%,$

podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym α w wysokości:

(A) $\frac{3}{11}$

(B) $\frac{4}{11}$

(C) $\frac{5}{11}$

(D) $\frac{6}{11}$

(E) $\frac{7}{11}$

Zadanie 3.
Łączna wartość szkód X ma złożony rozkład ujemny dwumianowy. Liczba szkód ma wartość oczekiwaną równą 1/2 i wariancję równą 2/3. Rozkład wartości pojedynczej szkody:

- ma na przedziale $(0, 5)$ gęstość daną wzorem $f(x) = 0.25 - 0.03x$,
- oraz w punkcie 5 masę prawdopodobieństwa równą 0.125.

Wariancja zmiennej X wynosi:

(A) $\frac{25\times13}{96}$

(B) $\frac{25\times15}{96}$

(C) $\frac{25\times17}{96}$

(D) $\frac{25\times19}{96}$

(E) $\frac{25\times21}{96}$

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym postaci:

- $U(t) = u + c \cdot t - S(t)$,

gdzie $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, oraz dwupunktowym rozkładem wartości pojedynczej szkody *Y*, takim, że:

- $\Pr(Y = 1) = \frac{1}{3}$,
- $\Pr(Y = 2) = \frac{2}{3}$.

Wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ jest dla dowolnego kapitału początkowego $u \geq 0$ obustronnie ograniczona:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{u+2} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{u}$.

Wobec tego składka *c* przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) 2λ

(B) $\frac{\lambda}{\sqrt{e}-1}$

(C) $\frac{e^{\lambda}-1}{\ln\frac{3}{2}}$

(D) $\frac{\lambda}{\ln\frac{3}{2}}$

(E) $\frac{\ln(1+\lambda)}{\ln\frac{3}{2}}$

Zadanie 5.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - (W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

- nadwyżka początkowa wynosi $u = 2.5 \times \ln\left(\frac{5}{4}\right)$,
- składka roczna wynosi $c = 2u$,
- a łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej jeden.

Oznaczmy przez N moment ruiny, a więc najmniejszą taką liczbę naturalną n, dla której $U_n < 0$. Oczywiście jeśli nadwyżka nigdy nie przyjmie wartości ujemnej, przyjmujemy $N = \infty$.

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(N \leq 2 | N < \infty)$ wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.559

(B) 0.477

(C) 0.406

(D) 0.344

(E) 0.290

Zadanie 6.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym postaci:

- $U(t) = u + c \cdot t - S(t)$,

gdzie $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ na jednostkę czasu, i pojedynczymi szkodami o wartości oczekiwanej $E(Y_1) = \mu$.
Niech $T_1 < T_2 < \dots$ oznaczają momenty wystąpienia kolejnych szkód. Zdyskontowana wartość $Z(t)$ procesu $U(t)$ dana jest wzorem:

- $Z(t) = u + \int_0^t ce^{-\delta s} ds - \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n e^{-\delta T_n}$,

gdzie δ to natężenie oprocentowania.
Jeśli przyjmiemy założenia liczbowe:
$u = 10$,
$c = 35$,
$\lambda = 10$,
$\mu = 3$,
$\delta = 0.1$,
to granica $\lim_{t \to \infty} \mathrm{E}[Z(t)]$ wyniesie:

(A) 60

(B) 55

(C) 50

(D) 45

(E) 40

Zadanie 7.
W pewnym ubezpieczeniu działa bardzo prosty system *No Claim Discount*. Taryfa składek określona jest dla czterech klas:

- w klasie 1 składka wynosi 50 zł,
- w klasie 2 wynosi 40 zł,
- w klasie 3 wynosi 30 zł,
- w klasie 4 wynosi 25 zł.

Przejście z klasy do klasy następuje na koniec każdego roku, przy czym po roku bezszkodowym ubezpieczony z klasy 1 przechodzi do 2, z klasy 2 do 3, z klasy 3 do 4, a jeśli był w klasie 4 – to dalej w niej pozostaje. Bez względu na klasę, w której ubezpieczony jest w roku danym, jeśli zgłosi szkodę (jedną lub więcej), to przechodzi do klasy 1.

Rozważmy ubezpieczonego, który generuje w kolejnych latach szkody zgodnie z procesem Poissona o częstotliwości $\lambda = (\ln 5 - \ln 4)$ rocznie. Załóżmy, że każdą szkodę zgłasza natychmiast po jej zajściu.
Wartość oczekiwana składki płaconej przez niego w n-tym roku ubezpieczenia dąży przy $n \to \infty$ do granicy równej (w zaokrągleniu do 10 groszy)

(A) 34.0 zł

(B) 33.0 zł

(C) 32.0 zł

(D) 31.0 zł

(E) 30.0 zł

Zadanie 8.
Rozważmy pewną populację ryzyk. Pojedyncze ryzyko z tej populacji generuje co najwyżej jedną szkodę w ciągu roku. Dane ryzyko, charakteryzujące się wartością q parametru ryzyka Q, generuje szkodę w każdym z kolejnych lat niezależnie, z prawdopodobieństwem q. Dla losowo wybranego ryzyka z tej populacji „jego q" jest realizacją zmiennej losowej Q.
Oznaczmy przez N_1 oraz N_2 odpowiednio liczbę szkód wygenerowaną przez pojedyncze, losowo wybrane z tej populacji ryzyko. Na podstawie obserwacji wielkiej liczby ryzyk z tej populacji, każde przez dwa kolejne lata ustalono, iż:

- $\Pr(N_1 + N_2 = 0) = \frac{2}{3}$,
- $\Pr(N_1 + N_2 = 1) = \frac{4}{15}$,
- $\Pr(N_1 + N_2 = 2) = \frac{1}{15}$.

Wobec tego wariancja parametru ryzyka w tej populacji:

- $var(Q)$

wynosi:

(A) $\frac{1}{15}$

(B) $\frac{1}{20}$

(C) $\frac{1}{25}$

(D) $\frac{3}{100}$

(E) $\frac{2}{75}$

Zadanie 9.
Prawdopodobieństwa z rozkładu liczby szkód N określonego na liczbach naturalnych z zerem spełniają zależność rekurencyjną:
$\Pr(N = n) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)\Pr(N = n - 1), \quad n = 1,2,3, \ldots.$
Wobec tego $\Pr(N = 0)$ wynosi (w przybliżeniu do jednej setnej):

(A) 0.16

(B) 0.18

(C) 0.20

(D) 0.22

(E) 0.24

Zadanie 10.

Liczba roszczeń zgłaszanych N ma rozkład ujemny dwumianowy:

- $\Pr(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r q^n, \quad n = 0,1,2,...,$

z parametrami $r = 2$ oraz $q = 0.2$, i oczywiście $p = 0.8$.
Każde roszczenie uznawane jest z prawdopodobieństwem 80%, a oddalane z prawdopodobieństwem 20%. Decyzje o oddalaniu lub uznawaniu kolejnych roszczeń są niezależne nawzajem oraz niezależne od liczby roszczeń N.
Oznaczmy przez K liczbę roszczeń uznanych, zaś przez M liczbę roszczeń oddalonych. Zachodzi oczywiście $N = K + M$.

Warunkowa wartość oczekiwana $\mathrm{E}(K|M = 1)$ wynosi:

(A) $\frac{4}{7}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{11}{21}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	E	
4	D	
5	C	
6	A	
7	B	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.