Zadanie 1.
O rozkładzie pewnego ryzyka X posiadamy następujące informacje:

- $\Pr(X \in [0,1]) = 1$
- $\mathrm{E(X)} = 1/3$
- $\Pr(X < 1/4) < 1/2$, a także $\Pr(X > 1/4) \geq 1/2$

Informacje w ostatniej linii oznaczają, że mediana rozkładu zmiennej X wynosi ¼.
Oznaczmy przez σ_{sup}^2 oraz σ_{inf}^2 odpowiednio supremum i infimum wartości wariancji na zbiorze wszystkich możliwych rozkładów zmiennej X spełniających powyższe warunki. Rozpiętość przedziału możliwych wariancji, czyli różnica:

$$\sigma_{sup}^2 - \sigma_{inf}^2$$

wynosi:

(A) 7/36

(B) 3/16

(C) 13/72

(D) 25/144

(E) 1/6

Zadanie 2.

Oczekiwana liczba szkód zgłaszanych w kolejnych latach w pewnym portfelu ubezpieczeń rośnie w stałym tempie, i wynosi w roku *t*:

$\lambda_t = \lambda_0 \times 1.08^t, \quad t = 0,1,2,\ldots$

Szkoda, która zaszła w roku t, likwidowana jest w roku $(t + D)$. D jest zmienną losową o tym samym rozkładzie dla każdej szkody (niezależnym m.in. od tego, w którym roku szkoda zaszła), danym wzorem:

- $\Pr(D = n) = (n + 1) \times 0.16 \times 0.6^n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$

Oznaczmy przez A_t zdarzenie polegające na tym, że szkoda losowo wyciągnięta ze zbioru wszystkich szkód, które zlikwidowane zostały w którymkolwiek z lat od roku numer 0 do roku numer t włącznie, została zlikwidowana w roku *t*. Możemy teraz warunkową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(D|A_t)$ zinterpretować jako średni czas likwidacji szkód likwidowanych w roku *t*.

Wobec tego $\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(D|A_t)$ wynosi:

(A) 3

(B) 2.916

(C) $\frac{25}{9}$

(D) 2.7

(E) 2.5

Zadanie 3.

Łączna wartość szkód X w ciągu roku z pewnego ryzyka ma rozkład złożony:

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N\,,$$

z rozkładem wartości pojedynczej szkody (wyrażonym w cenach roku ubiegłego) danym na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(x) = \frac{24}{(2+x)^4}\,.$$

O ile procent wzrośnie składka netto za pokrycie nadwyżki każdej szkody z tego ryzyka ponad kwotę d, jeśli kwota ta jest niezmienna i wynosi $d = 3$, natomiast ceny, w których wyrażamy szkody będą w bieżącym roku wyższe o 20% od cen roku ubiegłego? Wybierz odpowiedź prawidłową z dokładnością do 0.5%

(A) składka netto wzrośnie o 54%

(B) składka netto wzrośnie o 48%

(C) składka netto wzrośnie o 43%

(D) składka netto wzrośnie o 37%

(E) składka netto wzrośnie o 33%

Zadanie 4.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład dany dystrybuantą F (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc),
- zmienna losowa N ma rozkład geometryczny:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1,2,3,...$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, iż w ciągu miesiąca od momentu zajścia pewnego wypadku zgłoszono z tego wypadku 2 roszczenia. Wiemy, że $F(1) = 1/2$. Oczekiwana liczba roszczeń, które jeszcze z tego wypadku zostaną zgłoszone, a więc:

$$\mathrm{E}(N - 2 | A)$$

wynosi:

(A) 3/5

(B) 1

(C) 4/3

(D) 3/2

(E) 5/3

Zadanie 5.

X_1 oraz X_2 to dwa ryzyka (zmienne losowe) niezależne o tym samym rozkładzie danym dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & gdy \quad x < 0 \\ 0.5 + 0.3 \cdot x & gdy \quad x \in [0,1) \\ 1 & gdy \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo:

$$\Pr\left(X_1 + X_2 \leq \frac{2}{3} \right)$$

wynosi:

(A) 0.48

(B) 0.50

(C) 0.54

(D) 0.60

(E) 0.62

Zadanie 6.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- <u>1 portfel:</u>

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

- <u>2 portfel:</u>

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

Zadanie 7.
Wiemy, że w procesie nadwyżki ubezpieczyciela składka roczna wynosi c, zaś łączne wartości szkód w ciągu kolejnych lat to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie. Rozkład ten ma wartość oczekiwaną równą μ, wariancję równą σ^2, oraz współczynnik skośności o wartości nieujemnej równej γ.
Funkcję prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcję wysokości nadwyżki początkowej u) przybliżamy na dwa sposoby:

- Stosując aproksymację $\Psi_{diff}(u)$, opartą na znanych wynikach dla modelu, w którym przyrosty procesu nadwyżki na dowolnych rozłącznych odcinkach czasu są niezależne, i dla dowolnego $h > 0$ mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej $h(c-\mu)$ i wariancji $h\sigma^2$. (*Oznacza to oczywiście, że ignorujemy informację o skośności*)
- Stosując aproksymację $\Psi_{dV}(u)$, opartą na znanych wynikach dla modelu, w którym proces narastania szkód jest procesem złożonym Poissona ze szkodami wykładniczymi, z parametrami dobranymi tak, aby roczne przyrosty procesu miały rozkład o wartości oczekiwanej, wariancji i skośności równej zadanym wartościom $(c-\mu)$, σ^2, oraz γ.

Niech u^* oznacza taką wartość nadwyżki początkowej u, dla której zachodzi:

$$\Psi_{diff}(u) = \Psi_{dV}(u)$$

Przy założeniach liczbowych:

- $\mu = 10$, $\sigma = 2$, $c = 12$,

granica wartości u^* przy współczynniku skośności dążącym do zera (od góry):

$$\lim_{\gamma \downarrow 0}\left(u^*\right)$$

wynosi:

(A) 1/2

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(E) 4

Zadanie 8.
Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N = 0) = p_0,$$

$$\Pr(N = k) = (1 - p_0)(1 - q)q^{k-1}, \qquad k = 1,2,3,\dots,$$

z nieznanymi parametrami $p_0 \in [0,1)$, $q \in (0,1)$.
Mamy próbkę $N_1, N_2, \dots, N_{100}$ obserwacji ze 100 takich umów ubezpieczeniowych. Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech $(\hat{p}_0, \hat{q})$ oznaczają estymatory parametrów (p_0, q) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 45 szkód z 15 umów (pozostałe 85 umów okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora $\hat{q}$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 1/4

(B) 1/3

(C) 1/2

(D) 2/3

(E) 3/4

Zadanie 9.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają taki sam rozkład
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(Y_1)$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Wiadomo, że jeśli doszło do ruiny, wtedy istnieje taka liczba $K \in \{1, 2, \ldots, N\}$ że:

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_K > u \quad \text{oraz} \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_{K-1} \le u$$

Innymi słowy, K oznacza kolejny numer tego spadku, przy którym nastąpiła ruina, zaś liczba $(N - K)$ oznacza liczbę spadków, do których doszło już po zajściu ruiny.

Jeśli $\theta = 1/3$, zaś $u = 1/2$, to oczekiwana liczba spadków po zajściu ruiny:

$$\mathrm{E}(N - K \mid L > u)$$

wynosi:

(A) 3

(B) 3.5

(C) 4

(D) 4.5

(E) 5

Zadanie 10.
Liczby szkód $N_1,...N_t, N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ. Niech $N = N_1 + ... + N_t$. Parametr ryzyka Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f_\Lambda(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta x), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Jeśli przyjmiemy wartości parametrów:
$\alpha = 3$,
$\beta = 10$,
$t = 10$,
Wtedy warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:
- $\operatorname{var}(N_{t+1} | N_1,..., N_t) > \operatorname{var}(N_{t+1})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D O W I E D Z I..................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	E	
3	B	
4	B	
5	E	
6	C	
7	B	
8	D	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.