Zadanie 1.
Niech łączna wartość szkód:

- $W = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$

Ma złożony rozkład Poissona. Momenty rozkładu wartości pojedynczej szkody wynoszą:

- $\mathrm{E}(Y_1) = 1/3,$
- $\mathrm{E}[(Y_1)^2] = 1/3.$

Wiemy także, że momenty nadwyżki wartości pojedynczej szkody ponad udział własny w wysokości 1 wynoszą:

- $\mathrm{E}[(Y_1 - 1)_+] = 1/24,$
- $\mathrm{E}\{[(Y_1 - 1)_+]^2\} = 1/12.$

Niech teraz W_U oznacza łączna wartość szkód uciętych do wysokości udziału własnego wynoszącego dla każdej szkody 1, a więc:

- $W_U = \min\{Y_1, 1\} + \min\{Y_2, 1\} + \ldots + \min\{Y_N, 1\}$;

Wobec tego kwadrat współczynnika zmienności zmiennej W_U, a więc:

$$\frac{var(W_U)}{[\mathrm{E}(W_U)]^2}$$

Wynosi:

(A) $\frac{12}{7\mathrm{E}(N)}$

(B) $\frac{96}{49\mathrm{E}(N)}$

(C) $\frac{120}{49\mathrm{E}(N)}$

(D) $\frac{144}{49\mathrm{E}(N)}$

(E) $\frac{24}{7\mathrm{E}(N)}$

Zadanie 2.
Niech łączna wartość szkód:

- $W = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$

Ma złożony rozkład dwumianowy. Liczba szkód *N* ma rozkład dwumianowy z parametrami $(n, 1/3)$ o wartości oczekiwanej $n/3$. O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

- $\mathrm{E}(Y_1) = 15$,
- $\mathrm{E}(\min\{Y_1, 10\}) = 6$,
- Oraz iż jego drugi moment jest skończony.

Oznaczmy przez W_U oraz W_R części łącznej wartości szkód W pokrywane przez ubezpieczyciela i reasekuratora, odpowiednio. Zgodnie z warunkami kontraktu mamy:

- $W_U = \min\{Y_1, 10\} + \min\{Y_2, 10\} + \ldots + \min\{Y_N, 10\}$;
- $W_R = (Y_1 - 10)_+ + (Y_2 - 10)_+ + \cdots + (Y_N - 10)_+$.

Kowariancja tych dwóch części $cov(W_R, W_U)$ wynosi:

(A) $24n$

(B) $27n$

(C) $30n$

(D) $33n$

(E) $36n$

Zadanie 3.
Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej ½.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t. Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $3/2 < t \leq 5/2$, a więc

$$\mathrm{E}[N(2.5) - N(1.5)]$$

Wynosi:

(A) 1.975

(B) 1.957

(C) 1.935

(D) 1.910

(E) 1.883

Zadanie 4.
Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb $T_1, T_2, ..., T_N$ jest losowy)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich t wzorem: $f(t) = \ln(2)\, 2^{-t}$, przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny określony dla $k = 1,2,3, ...$ funkcją prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(2/3)} \frac{(1/3)^k}{k}$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku więcej roszczeń już nie będzie:

$$\Pr(N = 1 | A)$$

z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.667

(B) 0.750

(C) 0.833

(D) 0.869

(E) 0.914

Zadanie 5.
Łączna wartość szkód:
- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$,

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej liczbie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $y \ge 0$ gęstością:
- $f_{Y|\Lambda=\lambda}(y) = \frac{\lambda}{a+b\lambda}\exp\left(-\frac{\lambda}{a+b\lambda}y\right)$, gdzie $a \ge 0$, oraz $b > 0$.

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład dany dla $x \ge 0$ gęstością:
- $f_\Lambda(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:
- $a = 1,\ b = 10$
- $\alpha = 4$, $\beta = 40$

Wobec tego różnica:
- $\mathrm{E}(N)\cdot \mathrm{E}(Y_1) - \mathrm{E}(X)$

wynosi:

(A) 1

(B) 2/3

(C) 1/3

(D) 1/2

(E) 1/4

Zadanie 6.
Rozważamy proces dyskretny nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$U_n = u + (c - du)n - \sum_{k=1}^{n} W_n$, $n = 0,1,2,3,...$, gdzie:

- $u \equiv U_0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to kwota rocznej składki
- d – to stopa dywidendy wypłacanej corocznie akcjonariuszom od kapitału u
- $W_1, W_2, W_3,...$ - to niezależne zmienne o takim samym rozkładzie normalnym z parametrami μ_W i σ_W^2, wyrażające łączne wartości szkód w kolejnych latach

Wyznaczamy równocześnie składkę c oraz kapitał początkowy u w taki sposób, aby składka była jak najniższa, przy warunku, iż prawdopodobieństwo ruiny, a więc zdarzenia, iż:
- dla pewnego $n \in \{0,1,2,3,...\}$ zajdzie $U_n < 0$

równe jest z góry zadanej liczbie ψ.

W obliczeniach posługujemy się wzorem przybliżonym na prawdopodobieństwo ruiny opartym na aproksymacji procesu U_n ciągłym procesem Wienera o wartościach oczekiwanych i wariancjach rocznych przyrostów takich jak w procesie U_n.

Przy założeniach liczbowych:
$\psi = 1/100$, $\mu_W = 1000$, $\sigma_W^2 = 10000$, $d = 5\%$,
najniższa wartość składki c spełniająca ww. warunki znajduje się w przedziale:

(A) $(1030, 1040)$

(B) $(1040, 1050)$

(C) $(1050, 1060)$

(D) $(1060, 1070)$

(E) $(1070, 1080)$

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:

- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to skumulowana wartość szkód tworząca złożony proces Poissona z intensywnością λ, z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{4\lambda}{3\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ spełnia warunek:

- $\Psi(u) = 1/8$.

Niech zdarzenie A oznacza, iż do ruiny doszło, a więc dla pewnego $t > 0$ zaszedł warunek $U(t) < 0$.
Niech zdarzenie B oznacza, iż do ruiny doszło w tym momencie, w którym po raz pierwszy nadwyżka $U(t)$ spadła poniżej wartości kapitału początkowego u.
Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(B|A)$ mieści się w przedziale:

(A) (0.00, 0.01)

(B) (0.01, 0.02)

(C) (0.02, 0.03)

(D) (0.03, 0.04)

(E) (0.04, 1.00)

Zadanie 8.
W pewnym ubezpieczeniu może dojść co najwyżej do jednej szkody w ciągu roku. Wartość szkody (o ile do niej dojdzie) ma rozkład jednostajny na odcinku (0,1). Ubezpieczony, któremu (niezależnie w kolejnych latach) zdarzają się szkody z prawdopodobieństwem *q*, wędruje po klasach systemu bonus malus, w którym:

- Po roku ze zgłoszeniem szkody przenosi się do klasy 1
- Po roku bez zgłoszenia przenosi się do klasy 2 (jeśli był w klasie 1) lub do klasy 3 (jeśli był w klasie 2 lub 3).

Gdyby zgłaszał wszystkie szkody które mu się zdarzają, macierz prawdopodobieństw przejść wyglądałaby następująco:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Niech r_1, r_2 oraz r_3 oznaczają składkę płaconą przez ubezpieczonego przesuniętego właśnie do klasy 1, 2 lub 3 odpowiednio.
Ponieważ $r_1 > r_2 > r_3$, nasz ubezpieczony postanawia zastosować następującą strategię:

- Zgłasza szkodę, o ile jej wartość przekracza *d*
- Szkody nie przekraczające *d* pokrywa we własnym zakresie;

przy czym wartość *d* jest ta sama bez względu na klasę, w której aktualnie przebywa.

Ubezpieczony tak dobiera parametr *d*, aby wartość oczekiwana całkowitego kosztu (płaconej składki i kosztu samodzielnie pokrywanych szkód) była jak najmniejsza. Bierze przy tym pod uwagę oczekiwany całkowity koszt w pojedynczym, odległym okresie czasu (na tyle, żeby oczekiwaną składkę liczyć w oparciu o graniczny rozkład na przestrzeni klas).

Jeśli składki wynoszą odpowiednio: $r_1 = 0.14$, $r_2 = 0.10$, $r_3 = 0.075$, zaś parametr charakteryzujący naszego ubezpieczonego wynosi $q = 0.1$, to optymalna wartość parametru *d* wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0.051

(B) 0.062

(C) 0.073

(D) 0.085

(E) 0.097

Zadanie 9.

Liczby szkód w kolejnych latach z pojedynczego ryzyka, charakteryzującego się wartością λ parametru ryzyka Λ, są warunkowo niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ. Rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji generalnej ryzyk (nieskończonej) ma wartość oczekiwaną i wariancję równą odpowiednio μ_Λ i σ_Λ^2.

W poprzednim roku mieliśmy portfel złożony z 1000 ryzyk wylosowanych z tej populacji, i wygenerowały one N szkód.

W bieżącym roku będziemy mieć 1100 ryzyk, które wygenerują M szkód, przy czym:

- spośród ryzyk które ubezpieczaliśmy w roku poprzednim 100 losowo dobranych ryzyk opuściło nasz portfel (pozostanie lub opuszczenie portfela nie zależy od liczby wygenerowanych szkód)
- oprócz 900 ryzyk kontynuujących ubezpieczenie w portfelu, 200 ryzyk to ryzyka nowe, przypadkowo wylosowane z pozostałej części populacji.

Załóżmy, że:

- znamy jedynie łączną liczbę szkód zaszłych w poprzednim roku (nie wiemy, jak ta liczba rozkłada się pomiędzy tych, którzy kontynuują i nie kontynuują ubezpieczenia w roku bieżącym)
- wiemy ponadto, że $\mu_\Lambda = 1/4$ oraz $\sigma_\Lambda^2 = 1/32$.

Dobieramy parametry rzeczywiste a i b predyktora zmiennej losowej M postaci:

- $Pred(M|N) \coloneqq a + bN$

w taki sposób, aby otrzymać predyktor o najmniejszym błędzie średniokwadratowym wśród predyktorów nieobciążonych tej postaci. Współczynnik b dla tak dobranego predyktora wynosi:

(A) 9/11

(B) 1/10

(C) 2/11

(D) 1

(E) 11/10

Zadanie 10.
Niech $X_{t,j}$ oznacza pomiar zmiennej w miesiącu *j* roku *t*, $t = 1,2,...10$, $j = 1,2,...,12$.
Zakładamy, że $X_{t,j}$ zawiera składnik wahań sezonowych oraz wahań przypadkowych.
Dokładniej, wahania przypadkowe spełniają założenia:

- $\mathrm{E}\left(X_{t,j} \middle| \mu_j\right) = \mu_j$
- $\mathrm{var}\left(X_{t,j} \middle| \mu_j\right) = s^2$,
- $\mathrm{cov}\left(X_{t,j}, X_{s,k} \middle| \mu_j, \mu_k\right) = 0$, jeśli ($j \neq k$ lub $t \neq s$)

zaś wahania sezonowe spełniają założenia:

- $\mathrm{E}(\mu_j) = \mu$
- $\mathrm{var}(\mu_j) = a^2$
- $\mathrm{cov}(\mu_j, \mu_k) = 0$, jeśli $j \neq k$

W celu estymacji parametrów sezonowych μ_j posługujemy się współczynnikiem:

$$1 - z := \frac{\frac{1}{10} s^2}{a^2 + \frac{1}{10} s^2}.$$

Nie znamy parametrów a^2 ani s^2. Estymujemy $(1-z)$ korzystając z dekompozycji sumy kwadratów odchyleń na wahania wewnątrz-sezonowe i między-sezonowe:

$$1 - \hat{z} := const \cdot \frac{\sum_{t=1}^{10} \sum_{j=1}^{12} \left(X_{t,j} - \overline{X}_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{12} \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2}$$

gdzie $\overline{X}$ oraz $\overline{X}_j$ oznaczają odpowiednio średnią ogólną (ze 120 obserwacji) i średnią z obserwacji dotyczących *j*-tego miesiąca.

Jeśli estymator współczynnika $(1-z)$ miałby być ilorazem nieobciążonych estymatorów parametrów $\frac{1}{10} s^2$ oraz $\left(a^2 + \frac{1}{10} s^2\right)$, to stała *const* wynosi:

(A) $const = \frac{1}{9 \cdot 10}$

(B) $const = \frac{1}{10 \cdot 10}$

(C) $const = \frac{1}{10 \cdot 11}$

(D) $const = \frac{12}{9 \cdot 10 \cdot 11}$

(E) $const = \frac{11}{9 \cdot 10 \cdot 12}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	B	
4	C	
5	C	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.