Zadanie 1.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q})$, gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$
- Z, której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q), zaś zmienna Q ma rozkład n-punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$

Wariancje tych trzech zmiennych związane są równością:

$$var(Z) = var(Y) + a\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

Stała a występująca w tej równości wynosi:

(A) $n-1$

(B) n

(C) 1

(D) $\frac{n-1}{n}$

(E) $\frac{n-2}{n}$

Zadanie 2.
Oznaczmy przez N liczbę roszczeń zgłoszonych, przez K liczbę roszczeń uznanych, zaś przez $M_1, M_2, M_3 ...$ zmienne sygnalizujące decyzje o uznaniu (wartością jeden) lub oddaleniu (wartością zero) kolejnych roszczeń. Mamy więc:

- $K = M_1 + M_2 + ... + M_N$.

Zakładamy przy tym, że $N, M_1, M_2, M_3, ...$ są niezależne, oraz że:

- N ma rozkład dwumianowy o parametrach (n, q),
- $M_1, M_2, M_3, ...$ mają ten sam rozkład dwumianowy o parametrach $(1, Q)$.

Przy założeniu, że $n = 15$, $q = 3/10$, oraz $Q = 4/10$, warunkowa wartość oczekiwana liczby wszystkich roszczeń pod warunkiem, że liczba roszczeń uznanych wyniosła 4, a więc $\mathrm{E}(N|K = 4)$, wynosi:

(A) 5.50

(B) 5.80

(C) 5.98

(D) 6.25

(E) 6.70

Zadanie 3.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia *n*-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \ldots$.

Wypłata odszkodowania za *n*-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$.

Załóżmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ oraz $D_1, D_2, D_3, \ldots$ są wszystkie nawzajem niezależne, przy czym:

- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1,
- $D_1, D_2, D_3, \ldots$ mają rozkład Gamma o wartości oczekiwanej równej 2 i wariancji równej także 2.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego *n* wypłata odszkodowania za szkodę $n+1$-szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę *n*-tą wynosi:

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{5}{16}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{3}{16}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 4.
W procesie zgłaszania i likwidacji szkód każdą szkodę charakteryzuje para zmiennych losowych $(T,\ D)$, gdzie T oznacza moment zgłoszenia szkody, zaś $(T+D)$ moment jej likwidacji. Jeśli ponumerujemy szkody według chronologii ich zgłaszania, będziemy mieli $0 < T_1 < T_2 < \ldots$, natomiast takie nierówności nie muszą zachodzić dla $(T_1 + D_1),\ (T_2 + D_2), \ldots$.

Załóżmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ oraz $D_1, D_2, D_3, \ldots$ są wszystkie nawzajem niezależne, przy czym:

- Czasy oczekiwania na kolejne zgłoszenie $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1,
- Czasy likwidacji szkód $D_1, D_2, D_3, \ldots$ mają taki sam rozkład czteropunktowy, w którym każda z wartości $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pojawia się z takim samym prawdopodobieństwem równym ¼.

Warunkowa wartość oczekiwana czasu likwidacji szkody, pod warunkiem że szkoda w momencie czasu $t = 4$ oczekuje na likwidację, a więc:

- $E(D|T < 4 < T + D)$,

wynosi:

(A) 2.5

(B) 2.75

(C) 3

(D) 3.25

(E) 4

Zadanie 5.
Zmienne X_0 oraz X_1 reprezentują łączną wartość szkód z pewnej grupy ryzyk w dwóch kolejnych latach. Zmienne te są (przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ) zmiennymi losowymi warunkowo niezależnymi, o rozkładach złożonych Poissona z taką samą oczekiwaną liczbą szkód λ i takim samym rozkładem wartości pojedynczej szkody *Y*, o charakterystykach:

- $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma_Y^2$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład, o którym wiemy, że:

- $\mathrm{E}(\Lambda) = \mu_\Lambda$, $\mathrm{var}(\Lambda) = \sigma_\Lambda^2$.

Rozważamy predykcję X_1 opartą na zaobserwowanej liczbie N_0 oraz łącznej wartości szkód X_0 z poprzedniego roku. Zakładamy przy tym, że znamy wartości parametrów μ_Y, σ_Y^2, μ_Λ oraz σ_Λ^2.

Wśród liniowych nieobciążonyck predyktorów postaci:

- $LUP(X_1 | N_0, X_0) = X_0 \cdot z_X + N_0 \cdot \mu_Y \cdot z_N + \mu_\Lambda \cdot \mu_Y \cdot (1 - z_X - z_N)$,

poszukujemy predyktora najlepszego (*BLUP*), dobierając współczynniki z_N oraz z_X tak, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy predykcji:

- $E\left\{\left[X_1 - LUP(X_1 | N_0, X_0)\right]^2\right\}$.

Optymalna wartość z_X^* współczynnika z_X dana jest wzorem:

(A) $z_X^* = 0$

(B) $z_X^* = \dfrac{\mu_\Lambda + \sigma_\Lambda^2}{\mu_\Lambda \cdot \left(1 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2\right) + \sigma_\Lambda^2}$

(C) $z_X^* = \dfrac{\mu_\Lambda \cdot \left(1 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2\right)}{\mu_\Lambda \cdot \left(1 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2\right) + \sigma_\Lambda^2}$

(D) $z_X^* = \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\mu_\Lambda \cdot \left(1 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2\right) + \sigma_\Lambda^2}$

(E) $z_X^* = \dfrac{\mu_\Lambda}{\mu_\Lambda \cdot \left(1 + \sigma_Y^2 / \mu_Y^2\right) + \sigma_\Lambda^2}$

Zadanie 6.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:
$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$,
- $\mathrm{E}(Y_1) = 4$.

Wiemy też, że $c > 4\lambda$.
Przy tych założeniach warunkowy rozkład deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) nie jest dokładnie znany. Daje się jednak określić zbiór wszystkich możliwych wartości, jakie może przyjąć wartość oczekiwana tego rozkładu. Ten zbiór to przedział:

(A) $[1, \quad 4]$

(B) $[2, \quad 5]$

(C) $[3, \quad 6]$

(D) $[2, \quad 4]$

(E) $[3, \quad 5]$

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu *t*,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu *t*,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N$, $\quad$ ($L = 0$ gdy $N = 0$),

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej *u*, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 2$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$\mathrm{E}(N | L > u)$$

wynosi:

(A) $5\frac{1}{3}$

(B) $6\frac{1}{3}$

(C) $6\frac{2}{3}$

(D) $7\frac{1}{3}$

(E) $7\frac{2}{3}$

Zadanie 8.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu *t*,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu *t*,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają taki sam rozkład
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(Y_1)$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + ... + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej *u*, i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Wiadomo, że jeśli doszło do ruiny, wtedy istnieje taka liczba $K \in \{1, 2, ..., N\}$ że:

$$l_1 + l_2 + ... + l_K > u \quad \text{oraz} \quad l_1 + l_2 + ... + l_{K-1} \le u$$

Innymi słowy, *K* oznacza kolejny numer tego spadku, przy którym nastąpiła ruina.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 2$, oraz jeśli wiadomo, że ruina nastąpiła przy trzecim spadku, to oczekiwana liczba spadków pod tymi warunkami:

$$\mathrm{E}(N \mid L > u, K = 3)$$

wynosi:

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Zadanie 9.
Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N=0)=p_0,$$
$$\Pr(N=1)=p_1,$$
$$\Pr(N=k)=\frac{1-p_0-p_1}{\exp(\lambda)-1-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\qquad k=2,3,4,\ldots,$$

z parametrami spełniającymi założenia: $\lambda>0$, $p_0\geq 0$, $p_1\geq 0$, oraz $p_0+p_1<1$.
Okazało się, że w zbiorze 1000 takich umów ubezpieczeniowych zaobserwowano:

- 500 przypadków bezszkodowych
- 300 przypadków z jedną szkodą
- 142 przypadki z dwiema szkodami
- 41 przypadków z trzema szkodami
- 13 przypadków z czterema szkodami
- 3 przypadki z pięcioma szkodami
- 1 przypadek z sześcioma szkodami

Niech $(\hat{p}_0,\hat{p}_1,\hat{\lambda})$ oznaczają estymatory parametrów (p_0,p_1,λ) uzyskane metodą największej wiarygodności, opartego na założeniu o wzajemnej niezależności obserwacji. Wobec tego estymator $\hat{\lambda}$ jest rozwiązaniem poniższego równania:

$$\lambda=a\frac{\exp(\lambda)-1-\lambda}{\exp(\lambda)-1},$$

gdzie parametr a wynosi

(A) 39/50

(B) 39/10

(C) 24/25

(D) 39/25

(E) 12/5

Zadanie 10.

Liczby szkód $N_1,...N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + ... + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0, 1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\mathrm{var}\left(N_{11} \middle| N_1,..., N_{10}\right) > \mathrm{var}\left(N_{11}\right)$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	B	
4	C	
5	A	
6	B	
7	E	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.