Zadanie 1.
Niech zmienne losowe:

- $X_{t,k} = \mu + \mu_k + \varepsilon_{t,k},\ k = 1,2,\dots,K$ oraz $t = 1,2,\dots,T$,

oznaczają łączne wartości szkód odpowiednio dla k-tego kontraktu w t-tym roku.
O składnikach naszych zmiennych zakładamy, że:

- μ jest wspólną dla wszystkich zmiennych $X_{t,k}$ bezwarunkową wartością oczekiwaną
- μ_k jest odchyleniem warunkowej kontraktowej (dla k-tego kontraktu) wartości oczekiwanej od μ
- $\varepsilon_{t,k}$ jest odchyleniem zmiennej $X_{t,k}$ od swojej warunkowej kontraktowej wartości oczekiwanej w t-tym roku.

Przyjmujemy założenie, iż wszystkie K zmiennych losowych μ_k oraz $K \times T$ zmiennych $\varepsilon_{t,k}$ mają łączny rozkład normalny o zerowych wartościach oczekiwanych, zerowych kowariancjach i dwóch poziomach wariancji:

- $var(\mu_k) = a^2$,
- $var(\varepsilon_{t,k}) = s^2$

W celu predykcji odchyleń kontraktowych posługujemy się współczynnikiem:

$$1 - z := \frac{s^2}{Ta^2 + s^2}$$

Nie znamy parametrów $\mu,\ a^2$ ani s^2. Estymujemy $(1-z)$ korzystając z dekompozycji sumy kwadratów odchyleń na wahania wewnątrz-kontraktowe i między-kontraktowe:

$$1 - \hat{z} := const \times \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}(X_{t,k} - \bar{X}_k)^2}{\sum_{k=1}^{K}(\bar{X}_k - \bar{X})^2}$$

gdzie $\bar{X}$ oraz $\bar{X}_k$ oznaczają odpowiednio średnią ze wszystkich $K \times T$ obserwacji oraz średnią z obserwacji dotyczących k-tego kontraktu.

Przyjmujemy, że zarówno K jak i T są wystarczające na to, aby nasz estymator był określony i miał skończoną wartość oczekiwaną. Jeśli nasz estymator miałby być nieobciążony, należy stałą *const* przyjąć w wysokości:

(A) $\frac{K-1}{KT(T-1)}$

(B) $\frac{K-2}{KT(T-1)}$

(C) $\frac{K-2}{(K-1)T(T-1)}$

(D) $\frac{K-3}{KT(T-1)}$

(E) $\frac{K-3}{(K-1)T(T-1)}$

Zadanie 2.
Pewne ryzyko generuje w kolejnych sześciu okresach dwu-miesięcznych szkody o łącznej wartości odpowiednio $X_1, X_2, X_3\ X_4, X_5, X_6$. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne.
Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie ex post okresu (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 45/120

(B) 49/120

(C) 53/120

(D) 57/120

(E) 61/120

Zadanie 3.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1, 2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3/2	0	8/10	1
2	1	0	6/10	1
3	1/2	0	4/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

(A) $\frac{11}{6}e^{-3}$

(B) $\frac{13}{6}e^{-3}$

(C) $\frac{15}{6}e^{-3}$

(D) $\frac{17}{6}e^{-3}$

(E) $\frac{19}{6}e^{-3}$

Zadanie 4.

Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.

Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej ½.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t. Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $1 < t \leq 2$, a więc

$$\mathrm{E}[N(2) - N(1)]$$

Wynosi:

(A) 1.975

(B) 1.957

(C) 1.935

(D) 1.910

(E) 1.883

Zadanie 5.

Warunkowy rozkład wartości szkód generowanych przez pojedyncze ryzyko z pewnej populacji przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- z oczekiwaną liczbą szkód równą λ, oraz
- z wartością oczekiwaną pojedynczej szkody równą $(a + b\lambda)$, gdzie $a > 0$, oraz $b > -a$.

Rozkład parametru ryzyka Λ w tej populacji jest rozkładem beta o gęstości danej na przedziale $(0, 1)$ wzorem:

$f_\Lambda(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, z dodatnimi wartościami parametrów α, β.

Rozważmy dwie miary średniej szkody generowanej przez ryzyka z tej populacji.

- Miara M1 to po prostu bezwarunkowa oczekiwana wartość szkody, którą może wygenerować losowo dobrane ryzyko z tej populacji.
- Miara M2 związana jest z sytuacją, kiedy losowo dobieramy z tej populacji *n* ryzyk, które następnie generują N_n szkód o łącznej wartości S_n. Wtedy:

$$M2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{N_n} \middle| N_n > 0\right)$$

Wybierz zdanie poprawnie charakteryzujące relację tych miar w powyższym modelu populacji.

(A) M1 i M2 są równe

(B) $M1 \le M2$

(C) $M1 \ge M2$

(D) $M1 < M2$ gdy $b > 0$, zaś $M1 > M2$ gdy $b < 0$

(E) $M1 > M2$ gdy $b > 0$, zaś $M1 < M2$ gdy $b < 0$

Zadanie 6.
Rozważamy proces nadwyżki z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...$

- gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych, takich że:
- $W_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$
- nadwyżka początkowa u jest nieujemna, a średni przyrost dodatni $c > \mu$.

Przyjmijmy, iż założenia powyższe spełniają dwa niezależne procesy:

- proces U_n^X nadwyżki ubezpieczyciela *X*, o parametrach $(u_X, c_X, \mu_X, \sigma_X^2)$,
- proces U_n^Y nadwyżki ubezpieczyciela *Y*, o parametrach $(u_Y, c_Y, \mu_Y, \sigma_Y^2)$;

Rozważa się połączenie ubezpieczycieli *X* oraz *Y* w jedną firmę *S*, co da w rezultacie proces nadwyżki także spełniający bazowe założenia, o parametrach:

- $(u_S, c_S, \mu_S, \sigma_S^2) = (u_X + u_Y, c_X + c_Y, \mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Niech teraz Ψ_X, Ψ_Y oraz Ψ_S oznaczają standardowe górne oszacowania (Lundberga) dla prawdopodobieństwa ruiny w procesach nadwyżki odpowiednio: ubezpieczyciela *X*, ubezpieczyciela *Y*, oraz połączonego ubezpieczyciela *S*.
<u>Znajdź</u> taką funkcję $g(u, c, \mu, \sigma^2)$ parametrów procesu nadwyżki, dla której następujące nierówności są równoważne:
$\{\Psi_S < \Psi_X \Psi_Y\} \Leftrightarrow \{(g(u_X, c_X, \mu_X, \sigma_X^2) - g(u_Y, c_Y, \mu_Y, \sigma_Y^2)) \cdot (R_X - R_Y) < 0\}$

(A) $g(u, c, \mu, \sigma^2) = u$

(B) $g(u, c, \mu, \sigma^2) = u\sigma^2$

(C) $g(u, c, \mu, \sigma^2) = \frac{u}{\sigma^2}$

(D) $g(u, c, \mu, \sigma^2) = \frac{u(c-\mu)}{\sigma^2}$

(E) $g(u, c, \mu, \sigma^2) = \frac{u\sigma^2}{c-\mu}$

Zadanie 7.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach i.i.d.
Wyznaczamy składkę c za portfel ryzyk generujący łączną wartość szkód W przyjmując dla uproszczenia, iż prawdopodobieństwo ruiny ε spełnia równość $\varepsilon = \exp(-Ru)$, gdzie R to *adjustment coefficient*, zaś u to nadwyżka początkowa.
Przyjmujemy, iż zmienna W posiada funkcję generującą kumulanty, dodatnią skośność γ_W, natomiast wyrazy wyższych rzędów w rozwinięciu funkcji generującej kumulanty są pomijalne.
Przyjmujemy także konkretne założenia liczbowe:

- nadwyżka początkowa jest równa: $u = \frac{5}{2}\sigma_W$,
- przyjęty poziom bezpieczeństwa wynosi: $\varepsilon = \exp(-3)$

W rezultacie otrzymujemy formułę składki:
$c = E(W) + \sigma_W \cdot (a_0 + a_1 \cdot \gamma_W)$.
Parametry a_0 oraz a_1 formuły wynoszą:

(A) $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{25}\right)$

(B) $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$

(C) $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

(D) $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$

(E) $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{15}\right)$

Zadanie 8.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t)=u+ct-S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u)=1-\Psi(u)=\Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t)\geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c=110\%\lambda\mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.645\sqrt{var(L)}$ wynosi:

(A) 7.8%

(B) 7.1%

(C) 6.3%

(D) 5.7%

(E) 5.2%

Zadanie 9.

Liczby szkód $N_1,...N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q=q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + ... + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0,1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\operatorname{var}(N_{11} | N_1,..., N_{10}) > \operatorname{var}(N_{11})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) $N > 4$

Zadanie 10.
W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami q, b oraz v, o następującym znaczeniu:

- parametr q to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą b i wariancję równą b^2v^2.

Parametr v^2 dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą $1/5$. Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów (q,b) losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych (Q,B), o której wiemy, że:

- $\mathrm{E}(Q) = 0.1$,
- $var(Q) = 0.01$,
- $var(B) = \frac{1}{4}[\mathrm{E}(B)]^2$,
- zmienne Q i B są niezależne.

Niech W_n oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba n, dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{\mathrm{E}(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

(A) 1400

(B) 1350

(C) 1300

(D) 1250

(E) 1200

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I.........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	E	
5	D	
6	C	
7	A	
8	B	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.