Zadanie 1.

Zmienna losowa N ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami $(r, q) = \left(7\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$,

tzn.: $\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(7.5 + k)}{\Gamma(7.5)k!}\left(\frac{1}{3}\right)^{7.5}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}, \qquad k = 0,1,2,...$

Niech k^* oznacza taką liczbę naturalną, że:

$k^* = \inf\{k : \quad \Pr(N = k) \geq \Pr(N = k + 1)\}$

Liczba k^* wynosi:

(A) 12

(B) 13

(C) 14

(D) 15

(E) 16

Zadanie 2.

Pewien system bonus-malus składa się tylko z dwóch klas. Wędrówka kierowcy charakteryzującego się wartością q parametru ryzyka Q po przestrzeni klas $\{1, 2\}$ tworzy jednorodny łańcuch Markowa o prawdopodobieństwach przejść:

$$p_{i,j}^{q} := \Pr\left(X(t+1) = j \middle| X(t) = i, Q = q\right) \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2$$

W klasie pierwszej przebywają kierowcy którzy w poprzednim roku zgłosili szkody (jedną lub więcej), zaś w klasie drugiej (bonusowej) ci, którzy szkód nie zgłosili. Wobec tego postać macierzy prawdopodobieństw przejść jest dla $Q = q$ następująca:

$$\begin{bmatrix} p_{1,1}^{q} & p_{1,2}^{q} \\ p_{2,1}^{q} & p_{2,2}^{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}, \text{ gdzie } p = 1 - q$$

Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest dwupunktowy:

$\Pr(Q = 0.2) = 0.6$ (podpopulacja dobrych kierowców)

$\Pr(Q = 0.4) = 0.4$ (podpopulacja złych kierowców)

Rozważmy bezwarunkowe (ze względu na Q) prawdopodobieństwa przejść:

$$p_{i,j}(t) := \Pr\left(X(t+1) = j \middle| X(t) = i\right) \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2, \qquad t = 0,1,2,...$$

Oczywiście wartości $p_{i,j}(0)$ zależą od tego, w jakich proporcjach dobrzy i źli kierowcy rozlokowani zostali pomiędzy klasy pierwszą i drugą. Okazuje się jednak, że dla $t = 1,2,3,...$ macierz prawdopodobieństw jest już taka sama. Oblicz wartość jej lewego-górnego elementu, a więc:

$p_{1,1}(t)$ dla $t = 1,2,3,...$

(A) dla $t = 1,2,3,...$ $p_{1,1}(t) = \dfrac{7}{25}$

(B) dla $t = 1,2,3,...$ $p_{1,1}(t) = \dfrac{2}{7}$

(C) dla $t = 1,2,3,...$ $p_{1,1}(t) = \dfrac{7}{24}$

(D) dla $t = 1,2,3,...$ $p_{1,1}(t) = \dfrac{11}{35}$

(E) dla $t = 1,2,3,...$ $p_{1,1}(t) = \dfrac{7}{22}$

Zadanie 3.
Wartość oczekiwana szkód X z ryzyka jest funkcją parametru Θ który charakteryzuje podmiot na to ryzyko narażony, i wynosi $E(X|\Theta) = \Theta$. Rozkład parametru Θ w populacji dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Theta(\theta) = 2\{\exp(-\theta) - \exp(-2\theta)\}$

Ubezpieczyciel nie rozróżnia ryzyk lepszych od gorszych, ustalić więc musi składkę równą dla wszystkich. Musi się jednak liczyć ze skutkami negatywnej selekcji. Oznaczmy przez:

- U zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli podmiot nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;
- Π składkę zaoferowaną przez ubezpieczyciela.

Załóżmy, że negatywna selekcja przejawia się w tym, że:

- $\Pr(U = 1|\Theta = \theta) = 1 - \exp\left(-\frac{2\theta}{\Pi}\right)$ dla $\theta > 0$

Jeśli ubezpieczyciel ustalił składkę na poziomie $\Pi = 2$, to oczekiwana wartość szkód dla przeciętnego podmiotu (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:
$E(X|U = 1)$,
wyniesie:

(A) 2

(B) $\frac{19}{12}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{21}{12}$

(E) $\frac{11}{6}$

Zadanie 4.
Liczba szkód N przy danej wartości λ parametru Λ charakteryzującej kierowcę ma rozkład Poissona:

$$\Pr(N = k | \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Rozkład parametru Λ w populacji kierowców dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = 81 \cdot \lambda \cdot \exp(-9\lambda)$

Mowa jednak o szkodach w których sprawca i poszkodowany to ta sama osoba, a więc ubezpieczenie (AC) jest w tym wypadku dobrowolne. Niech:

- U oznacza zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli kierowca nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;

Załóżmy, że:

- $\Pr(U = 0 | \Lambda = \lambda) = \exp(-2\lambda)$ dla $\lambda > 0$

Informacja o kierowcy z poprzedniego roku może brzmieć tak, że:

- Nie nabył ubezpieczenia
- Nabył ubezpieczenie, i miał zero szkód, jedną szkodę, dwie szkody, …

Stosunek warunkowych wartości oczekiwanych:

$$\frac{\mathrm{E}(\Lambda | U = 1, N = 0)}{\mathrm{E}(\Lambda | U = 0)}$$

wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{31}{30}$

(C) $\frac{41}{30}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{91}{60}$

Zadanie 5.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład Pareto dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_Y(y) = \dfrac{2}{(1+y)^3}$
- zaś nadwyżka początkowa i parametr intensywności składki wynoszą:
- $u = 4, \quad c = 1.2, \quad \lambda = 1$

Prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w pierwszym z tych momentów czasu, kiedy nadwyżka spadnie poniżej wartości początkowej, wynosi:

(A) $\dfrac{1}{30}$

(B) $\dfrac{1}{25}$

(C) $\dfrac{5}{24}$

(D) $\dfrac{1}{6}$

(E) $\dfrac{1}{5}$

Zadanie 6.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...,$ $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$,

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3,...$ są niezależne i mają ten sam rozkład dany na odcinku $(0, 1)$ gęstością:

$f_W(x) = 6x(1-x)$

Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $u = 0$, $c = \frac{1}{2}$

to prawdopodobieństwo ruiny w horyzoncie dwóch okresów czasu (a więc prawdopodobieństwo zdarzenia, iż $U_1 < 0$ lub $U_2 < 0$) wynosi:

(A) $\frac{5}{8}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{7}{8}$

(D) $\frac{29}{32}$

(E) $\frac{15}{16}$

Zadanie 7.

W procesie nadwyżki $U(t)$ c oznacza intensywność składki na jednostkę czasu, $u = U(0)$ oznacza nadwyżkę początkową, zaś para (T_n, Y_n) oznacza moment zajścia i wartość n-tej szkody. Oznaczmy przez $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ czas oczekiwania na n-tą szkodę (oczywiście $\Delta T_1 = T_1$).

Przyjmujemy, że:

- $\Delta T_1, Y_1, \Delta T_2, Y_2, \Delta T_3, Y_3, \ldots$ są niezależne,
- $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \ldots$ mają ten sam rozkład (mówić będziemy o rozkładzie ΔT),
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład (mówić będziemy o rozkładzie Y).

Rozważmy model 1, gdzie:

- ΔT ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej λ^{-1},
- Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1};

oraz model 2, gdzie:

- ΔT ma rozkład Gamma z parametrami $(2, \lambda)$ o wartości oczekiwanej $2\lambda^{-1}$,
- Y ma rozkład Gamma z parametrami $(2, \beta)$ o wartości oczekiwanej $2\beta^{-1}$;

Oznaczmy współczynnik dopasowania oraz funkcję prawdopodobieństwa ruiny w pierwszym modelu przez R_1 oraz $\Psi_1(u)$, zaś w drugim przez R_2 oraz $\Psi_2(u)$.

Załóżmy, że $c > \lambda\beta^{-1}$.

Spośród poniższych zdań wybierz zdanie prawdziwe:

(A) $R_1 = R_2$ oraz $\underset{u\geq 0}{\forall} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$

(B) $R_1 = R_2$ oraz $\underset{u\geq 0}{\forall} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$

(C) $R_1 > R_2$ oraz $\underset{u\geq 0}{\forall} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$

(D) $R_1 < R_2$ oraz $\underset{u\geq 0}{\forall} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$

(E) Żadne z powyższych zdań nie jest prawdziwe

Zadanie 8.

Łączna wartość szkód $X = Y_1 + \ldots + Y_N$ ma złożony rozkład Poissona, gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest określony na półosi nieujemnej, i ma dodatnie i skończone momenty zwykłe pierwszych trzech rzędów.

Przy powyższych założeniach iloraz współczynnika skośności i współczynnika zmienności zmiennej X daje się ograniczyć od dołu. Efektywne ograniczenie to najmniejsza liczba c^* spośród takich liczb c, że dla dowolnego rozkładu zmiennej X spełniającego założenia zachodzi:

$$\frac{\gamma_X}{V_X} \geq c$$

gdzie γ_X to współczynnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześcianu odchylenia standardowego) a V_X to stosunek odchylenia standardowego do wartości oczekiwanej.

(A) $c^* = \frac{1}{2}$

(B) $c^* = \frac{2}{3}$

(C) $c^* = 1$

(D) $c^* = 2$

(E) $c^* = \frac{3}{2}$

Zadanie 9. Nadwyżka ubezpieczyciela w wyniku rocznej działalności wynosi:

- $U_1 = (c+u)(1+i) - W$,

gdzie:

- W - oznacza łączną wartość szkód wypłacanych na koniec roku
- c - to zagregowana składka za portfel ryzyk W, pobierana na początku roku
- u - to kapitał początkowy, zabezpieczający ryzyko portfela W
- i - to stopa zwrotu z bezryzykownych papierów wartościowych, w które zainwestowany jest przez okres roku kapitał zabezpieczający u i składka c

Załóżmy, że W ma rozkład ciągły, dany dystrybuantą F_W .

Ubezpieczyciel podejmuje decyzję łączną o wysokości potrzebnego kapitału początkowego u oraz składki c, kierując się następującymi przesłankami:

- $\mathrm{E}(U_1) = (1+r)u$
- $\Pr\left(U_1 < \frac{3}{4}u\right) = \varepsilon$

gdzie:

- $r > i$, tzn. oczekiwana stopa zwrotu jest większa od stopy zwrotu bez ryzyka,
- prawdopodobieństwo ε utraty więcej niż ćwierci wyłożonego kapitału u jest małe.

W rezultacie składka c dana jest następującym wzorem:

(A) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{r+\frac{3}{4}}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(B) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{r+\frac{1}{4}}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(C) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{\frac{1}{4}+r-i}{r+\frac{3}{4}}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(D) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{\frac{1}{4}+r-i}{r+\frac{1}{2}}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(E) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{r+\frac{1}{2}}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

Zadanie 10.
Mamy trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie danym na odcinku $(0, 2)$ gęstością:
$$f_D(x) = 1 - 0.5x,$$
- Y – wartość szkody.

Jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej T, jak i dla zmiennej D) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz D są nawzajem niezależne.
- Wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i dłużej trwającej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie:
$$\mathrm{E}(Y|D,T) = \mathrm{E}(Y|D) = 10 + D$$

Warunkowa oczekiwana wartość szkody pod warunkiem, że szkoda ta została zlikwidowana w roku zajścia, a więc:
$$E(Y|T + D \leq 1)$$
wynosi:

(A) 10.2

(B) $10\frac{1}{4}$

(C) 10.3

(D) $10\frac{1}{3}$

(E) 10.4

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I..............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	E	
4	E	
5	D	
6	A	
7	B	
8	C	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.