Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 17 marca 2008 r.

1. Niech $e_{x:\overline{1}|}(CF)$ oznacza przeciętne dalsze trwanie życia (x) w ciągu najbliższego roku obliczone przy założeniu hipotezy interpolacyjnej o stałym natężeniu wymierania między wiekami całkowitymi. Podobnie niech $e_{x:\overline{1}|}(B)$ oznacza tę samą wielkość obliczoną przy założeniu hipotezy interpolacyjnej Balducciego.

Wiadomo, że x jest liczbą całkowitą oraz $p_x = 0.99$.

Obliczyć $e_{x:\overline{1}|}(CF) \cdot e_{x:\overline{1}|}(B)$.

Wybrać wartość najbliższą.

(A) 0,988

(B) 0,989

(C) 0,990

(D) 0,991

(E) 0,992.

2. Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia z ubezpieczenia bezterminowego na życie dla (x), które wypłaca 1 w chwili śmierci. Ponadto, niech Y oznacza wartość obecną renty życiowej dla (x), która wypłaca świadczenie z intensywnością roczną 1 aż do śmierci. Zakładamy, że (x) należy do populacji wykładniczej ze stałym natężeniem wymierania $\mu_{x+t} = \mu > 0$ oraz, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta > 0$.

Ponadto wiadomo, że

$$\Pr\big(Z < E(Z)\big) = \Pr\,(Y < E(Y)).$$

Wówczas spełnione jest równanie:

(A)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + \mu + 1}{2\delta}$$

(B)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + 2}{2\delta}$$

(C)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + \mu + 1}{\delta}$$

(D)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{2\mu + 1}{2\delta}$$

(E)

$$E(Z) + E(Y) = \frac{\delta + 1}{2\delta}$$

1.

3. Niech standardowo $\bar{P}(\bar{A}_x)$ oznacza intensywność roczną składki netto za ubezpieczenie bezterminowe ciągłe wypłacające 1 w chwili śmierci. Składka jest opłacana w postaci renty życiowej ciągłej. Niech ponadto $\delta > 0$ oznacza techniczną intensywność oprocentowania. Wówczas pochodna $\frac{d\,\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta}$ wyraża się wzorem:

(A

$$\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(\bar{I}\,\bar{a})_x - \bar{A}_x}{\bar{a}_x^2}$$

(B)

$$\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(\bar{I}\,\bar{a})_x - \bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}$$

(C)

$$\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(\bar{I}\,\bar{a})_x - \bar{a}_x^2}{\bar{a}_x^2}$$

(D)

$$\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(\bar{I}\,\bar{a})_x - \bar{A}_x \cdot \bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}$$

(E)

$$\frac{d\bar{P}(\bar{A}_x)}{d\delta} = \frac{(\bar{I}\,\bar{a})_x - 1}{\bar{a}_x^2}$$

4. Za jednorazową składkę netto $SJN = 1$ osoba (65) może kupić natychmiastową emeryturę dożywotnią z gwarantowanym okresem wypłat o długości g. Będzie ona wypłacana w formie renty życiowej ciągłej ze stałą roczną intensywnością $E(g)$, ale nie krócej niż przez g lat.
Wówczas funkcja $E(g)$ spełnia następujące równanie różniczkowe:

(A)
$E'(g) = -E(g) \quad e^{-\delta g} \quad {}_{g}q_{65}$

(B)
$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \quad {}_{g}q_{65}$

(C)
$E'(g) = -E(g) \quad e^{-\delta g} \quad {}_{g}p_{65}$

(D)
$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \quad {}_{g}p_{65} \quad {}_{g}q_{65}$

(E)
$E'(g) = -E(g)^2 e^{-\delta g} \quad {}_{g}p_{65}$

5. (25) należący do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$ zaciągnął kredyt w wysokości $K = 100000$. Będzie go spłacał przez najbliższe $n = 30$ lat za pomocą jednej z poniższych metod:

(1) metodą równych rat (zwaną czasem *annuitetową*),

albo

(2) metodą równych rat kapitałowych (saldo liniowe),

każdorazowo w formie renty ciągłej 30-letniej o odpowiednio dobranej funkcji intensywności rat. Intensywność oprocentowania kredytu jest stała w czasie i wynosi $0{,}03$ dla obu metod.

Nasz kredytobiorca musi ubezpieczyć ryzyko niespłacenia kredytu z powodu przedwczesnej śmierci (tzn. śmierci przed osiągnięciem wieku 55). Niech $SJN(1)$ (odpowiednio $SJN(2)$) oznacza składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie, gdy wybierze pierwszą (odpowiednio drugą) metodę spłaty.

Techniczna intensywność oprocentowania używana do kalkulacji składek wynosi $\delta = 0{,}03$.

Obliczyć $SJN(1) - SJN(2)$.

Wybrać wartość najbliższą.

(A) 1900

(B) 2000

(C) 2100

(D) 2200

(E) 2300.

6. (60) wzięty z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$ kupuje za jednorazową składkę netto SJN następujący produkt emerytalny:

(a) Do końca życia będzie pobierać emeryturę w postaci renty życiowej ciągłej z roczną intensywnością stale równą 1;

(b) Oprócz tego w chwili jego śmierci uposażeni otrzymają jednorazowe świadczenie w wysokości uzależnionej od bieżącej rezerwy; dokładniej: Jeżeli umrze w wieku $60 + t$, to świadczenie $b(t)$ wyniesie

$$b(t) = V(t) \cdot \frac{40 + t}{80}$$

gdzie $0 < t < 40$. Znaleźć SJN obliczoną przy technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0{,}02$.

Wybrać wartość najbliższą.

(A) 20,38

(B) 21,38

(C) 22,38

(D) 23,38

(E) 24,38.

7. Rozważamy polisę na życie wystawioną (x), która wypłaci świadczenie w chwili śmierci. Wysokość świadczenia jest uzależniona od rodzaju śmierci:

- gdy ubezpieczony zginie w wypadku ($J = 2$) zostanie wypłacona suma $s > 1$,
- gdy ubezpieczony umrze, ale nie w wypadku ($J = 1$) zostanie wypłacone 1.

Niech Z oznacza wartość obecną wypłaty. Dane są:

$\mu_{1,x+t} \equiv 0{,}01$, $\mu_{2,x+t} \equiv 0{,}001$, $\delta = 0{,}03$, $E(Z) = 0{,}3$.

Obliczyć $Var(Z)$.

Wybrać wartość najbliższą.

(A) 0,125

(B) 0,130

(C) 0,135

(D) 0,140

(E) 0,145.

8. Mężczyzna (65) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 90$ a kobieta (60) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 100$. Obliczyć

$Cov(T(65), T(65{:}60))$

Zakładamy, że zmienne losowe $T(60)$ oraz $T(65)$ są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 34,8

(B) 35,8

(C) 36,8

(D) 37,8

(E) 38,8.

9. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie dla (25) wypłacające 1 na koniec roku śmierci i opłacane za pomocą corocznych składek w stałej wysokości netto P_{25}. Dane są:

$i = 5\%$, ${}_{30}p_{25} = 0.941077$, $q_{54} = 0.00535$, $q_{55} = 0.00576$,

$Var(\Lambda_{29}) = 0.00251252$, $Var(\Lambda_{30}) = 0.00258994$.

Obliczyć rezerwę składek netto ${}_{29}V$.

Podać odpowiedź najbliższą.

(A) 0.230

(B) 0.235

(C) 0.240

(D) 0.245

(E) 0.250.

10. Za jednorazową składkę netto KM (od *kwota męża*) mąż (x) może kupić rentę dożywotnią ciągłą, która będzie wypłacać z roczną intensywnością $E_x(KM)$ aż do jego śmierci. Podobnie, za jednorazową składkę netto KŻ (od *kwota żony*) żona (y) może kupić rentę dożywotnią ciągłą, która będzie wypłacać z roczną intensywnością $E_y(K\dot{Z})$ aż do jej śmierci. Mogą wreszcie za kwotę KM+KŻ kupić emeryturę małżeńską, która będzie wypłacać z roczną intensywnością $E(KM + K\dot{Z})$ aż do drugiej śmierci. Wiadomo, że:

$$\frac{E_x(20) + E_y(10)}{E(30)} = 1{,}46581$$

$$\frac{E_x(15) + E_y(20)}{E(35)} = 1{,}35897$$

Obliczyć:

$$\frac{E_x(20) + E_y(20)}{E(40)}$$

Podać odpowiedź najbliższą.

(A) 1,37

(B) 1,39

(C) 1,41

(D) 1,43

(E) 1,45.

XLV Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	E	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	A	
8	B	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.