

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018 r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Dla pewnej kohorty dana jest mieszanina funkcji opisująca rozkład trwania życia:

$$F(t) = \lambda \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\theta_1} \right)^{\beta_1} \right] \right) + (1 - \lambda) \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\theta_2} \right)^{\beta_2} \right] \right)$$

dla której oszacowano:  $\hat{\lambda} = 0,2$  oraz  $\hat{\beta}_1 = 3$ ,  $\hat{\beta}_2 = 4$ ,  $\hat{\theta}_1 = 15$ ,  $\hat{\theta}_2 = 50$ .

Nadumieralność adolescentów obserwowana w przebiegu intensywności zgonów kończy się w tej kohorcie w wieku:

(A) dokładnie 15 lat

(B)  $t_0$ , gdzie  $t_0$  jest rozwiązaniem równania:

$$t \cdot \exp \left( - \frac{t^4}{50^4} \right) = - \frac{50000}{27 \cdot 16} \cdot \exp \left( - \frac{1}{15^3} \right)$$

(C)  $t_0$ , gdzie  $t_0$  jest rozwiązaniem równania

$$- \frac{1}{15^3} \cdot \exp \left( - \frac{1}{15^3} \right) - \frac{4}{50^4} \cdot \exp \left( \ln t - \frac{t}{50^4} \right) = 0$$

(D)  $t_0$ , gdzie  $t_0$  jest rozwiązaniem równania

$$- \frac{0,6}{15^3} \cdot t^2 \cdot \exp \left( - \frac{t^3}{15^3} \right) - \frac{0,8}{50^4} \cdot t^3 \cdot \exp \left( - \frac{t^4}{50^4} \right) = 0$$

(E) żadne z powyższych

**Zadanie 2.**

Ubezpieczyciel planuje sprzedaż bezterminowego ubezpieczenia na życie (typu ciągłego), z sumą ubezpieczenia 100 tys. zł, skierowanego do populacji A. Część osób populacji A została narażona na czynniki promieniotwórcze, co wpłynęło na intensywność umieralności tej podpopulacji. Pierwotnie intensywność umieralności wyrażona była wzorem  $\mu_x = \frac{1}{100-x}$  dla  $0 \leq x \leq 100$ , podpopulacja narażona na czynniki promieniotwórcze ma intensywność większą o  $\frac{10}{(100-x) \cdot (90-x)}$ . Ubezpieczyciel skalkulował składkę dla 45-latków. Zakładając, że ubezpieczyciel nie ma możliwości identyfikacji członków podpopulacji narażonej na czynniki promieniotwórcze wyznacz odsetek osób nienarażonych w populacji A, dla których składka w wysokości  $P = 4000$  nie daje oczekiwanej straty na 1 polisę, na moment jej wystawienia. Intensywność oprocentowania  $\delta = 0,04$ .

- (A) co najmniej 24,4%
- (B) co najmniej 71,2%
- (C) co najmniej 74,6%
- (D) co najmniej 94,6%
- (E) żadne z powyższych

**Zadanie 3.**

W populacji osób chorujących na pewną chorobę obserwowano czas przeżycia:

Pacjent	Data rozpoznania	Data ostatniego kontaktu z pacjentem lub data zgonu <sup>a</sup>	Zmienna ucięta <sup>b</sup>
A	1 I 2008	1 IX 2009	0
B	1 I 2008	1 XII 2010	1
C	1 I 2010	1 VI 2012	1
D	1 I 2012	1 IV 2016	0
E	1 I 2014	1 I 2015	0
F	1 I 2015	30 VI 2015	0
G	1 I 2015	1 I 2018	1
H	1 I 2015	1 I 2017	1

*a* O ile zgon nastąpił. *b* Zgon=1.

Za pomocą estymatora Kaplana-Meiera ocenić prawdopodobieństwo przeżycia 3-letniego.

- (A) 0,200
- (B) 0,219
- (C) 0,400
- (D) 0,600
- (E) żadne z powyższych

**Zadanie 4.**

Wyznacz współczynnik względnego narzutu bezpieczeństwa zwiększający składkę netto, które w jednorodnym portfelu ubezpieczyciela zagwarantują wypłacalność z prawdopodobieństwem 0,98. Portfel zawiera 250 polis wystawionych dla 45-latków, płatnych w momencie śmierci, pod warunkiem, że śmierć nastąpiła do 70tych urodzin. Każda z polis wystawiona została na sumę 80 tys. zł. Czas trwania życia jest zgodny z prawem de Moivre'a ( $\omega = 110$ ), intensywność oprocentowania jest na poziomie 0,05.

- (A) 0,139
- (B) 0,173
- (C) 0,253
- (D) 2,193
- (E) żadne ze wskazanych

**Zadanie 5.**

Wyznacz  $\ddot{a}_{x:\overline{5}|}^{(12)}$  przy założeniu, że funkcja  $l_{x+t}$  jest w jednorocznej grupie wieku liniowa, jeżeli dane są

$$i=0,05; {}_5p_x = 0,95; \ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 2,50$$

(A) 2,38

(B) 2,40

(C) 2,42

(D) 2,44

(E) 2,46

**Zadanie 6.**

Ubezpieczyciel sprzedaje ubezpieczenie bezterminowe dla pary, zobowiązując się do wypłaty 1 zł w chwili śmierci pierwszej osoby z pary. Składka będzie płacona aż do pierwszej śmierci za pomocą renty życiowej ciągłej z intensywnością netto  $\bar{P}$ . Obliczyć rezerwę składek netto po 20 latach od wystawienia polisy. Przyszłe czasy życia obu osób  $T(x_1)$  oraz  $T(x_2)$  uznane zostały za niezależne zmienne losowe; jednocześnie wiadomo, że w populacji  $T(x_1) \sim U(0; 87)$  oraz  $T(x_2) \sim U(0; 75)$   
 $\delta = 0,05$ ; w chwili zawarcia umowy  $x_1 = 45$ ;  $x_2 = 25$

- (A) 0,052
- (B) 0,063
- (C) 0,329
- (D) 0,333
- (E) żadne z powyższych

**Zadanie 7.**

Otwarty plan emerytalny (model ciągły) oferuje osobom w wieku 67 lat dożywotnią emeryturę płatną z roczną intensywnością 100 zł za każde 1000 zł wniesionego kapitału, bez względu na płeć osoby przystępującej do planu.

Umieralność 67-letnich mężczyzn w populacji opisuje prawo de Moivre'a ( $\omega_m = 75$ ), zaś umieralność 67-letnich kobiet analogiczne prawo ( $\omega_k = 87$ ). Wyznacz oczekiwaną stratę ubezpieczyciela dla zbiorowości nowych 67-letnich członków planu, jeśli zawarto 150 umów z mężczyznami wpłacającymi przeciętnie po 150 tys. zł oraz 60 umów z kobietami wpłacającymi przeciętnie po 120 tys. zł.

Intensywność oprocentowania wynosi 0,05.

- (A) 13 180 000
- (B) 16 490 000
- (C) 132 100 000
- (D) 13 180 000 000
- (E) żadne z powyższych



**Zadanie 8.**

Pewna 65-letnia kobieta wykupuje dożywotnie ubezpieczenie rentowe wypłacające 24 tys. zł na koniec każdego roku ubezpieczenia. W chwili wykupu ubezpieczenia kobieta cierpi z powodu pewnej niesprawności, którą można skorygować operacyjnie. Gdyby nie poddała się operacji powinna być zaliczona do grupy osób, których umieralność podlega prawu de Moivre'a z wiekiem granicznym 75 lat. O ile podda się operacji, a ta zakończy się sukcesem, będzie można zaliczyć ją do grupy, której umieralność podlega temu samemu prawu z wiekiem granicznym 85 lat. Za sukces uznaje się przeżycie pacjenta, w tym typie zabiegów z prawdopodobieństwem 0,70. Przyjmuje się, że po operacji nie ma żadnych komplikacji, a skuteczność metody w korygowaniu schorzenia jest 100%. Wyznacz jednorazową składkę za ubezpieczenie, jeżeli termin planowanej operacji został wyznaczony za pół roku (a kobieta nie wycofa się).

Stopa procentowa 3%.

- (A) 231 508
- (B) 234 955
- (C) 236 382
- (D) 405 951
- (E) żadne z powyższych

**Zadanie 9.**

Rozważamy ubezpieczenie emerytalne 50-latka, który należy do populacji o stałym, niezależnym od wieku tempie umieralności wynoszącym 0,02. Ma ono polegać na tym, że przez najbliższe 15 lat będzie on płacił składkę netto co roku, a po dożyciu do 65 r.ż. zacznie otrzymywać rentę dożywotnią w wysokości 1 zł na początku roku. Przyjmując  $i = 3\%$  wyznacz  $\pi_{22}^S$ .

- (A) -0,143
- (B) -0,343
- (C) -0,602
- (D) -0,620
- (E) -0,921

**Zadanie 10.**

Z ubezpieczenia dla 5-osobowej rodziny, będzie wypłacana suma 1 zł każdej osobie przeżywającej w momencie śmierci jednego z członków rodziny (dla uproszczenia przyjmujemy, że jednoczesne śmierci nie są możliwe, a czasy trwania życia poszczególnych członków rodziny to zmienne niezależne). Rodzice (2) należą do populacji wykładniczej o intensywności umieralności niezależnej od wieku z przeciętnym trwaniem życia 70 lat, zaś dzieci (3) należą do analogicznej populacji wykładniczej z przeciętnym trwaniem życia 90 lat. Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie.

Intensywność oprocentowania wynosi 0,05.

(A)  $\frac{4}{11} + \frac{4}{13} + \frac{64}{127}$

(B)  $\frac{4}{11} + \frac{12}{13} + \frac{384}{127}$

(C)  $\frac{4}{11} + \frac{4}{13} + \frac{32}{95}$

(D)  $\frac{4}{11} + \frac{12}{13} + \frac{192}{95}$

(E)  $\frac{4}{11} + \frac{12}{13} + \frac{64}{127}$

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 marca 2018 r.**

**Matematyka ubezpieczeń na życie**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	E	
3	D <sup>a</sup>	
4	A	
5	A	
6	C	
7	E	
8	E	
9	C	
10	D	

*a* Komisja uznała również odpowiedź B.

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.