

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXVI Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 10 marca 2014 r.

1. Zmiana rozkładu trwania życia typu C(a,b) polega na tym, że nowa funkcja  $\mu'_x$  wyraża się przez „starą” funkcję  $\mu_x$  wzorem

$$\mu'_x = a\mu_x + b,$$

dla każdego  $x \geq 0$ , przy czym  $a, b$  są parametrami. Niech  ${}_t p_x(a, b)$  oznacza  ${}_t p_x$  dla populacji zmienionej.

Dane są  ${}_t p_x(1,05; 0,001) = 0,724650$ ,  ${}_t p_x(1,02; 0,002) = 0,716458$ .

Oblicz

$${}_t p_x(1,11; 0,004).$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 0,61                      (B) 0,63                      (C) 0,65                      (D) 0,67  
(E) 0,69

2. Rozważmy ciągle ubezpieczenie na życie ogólnego typu, które wypłaca świadczenie śmiertelne według schematu:

- $c(t) = t$  dla  $t \leq 10$ ,
- $c(t) = -10 + 2t$  dla  $10 \leq t \leq 20$ ,
- $c(t) = 10 + t$  dla  $t \geq 20$ .

Oblicz składkę jednorazową netto SJN. Dane są:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = 20, \quad (\bar{I}\bar{A})_{x+10} = 15, \quad (\bar{I}\bar{A})_{x+20} = 10,$$

$${}_{10}p_x = 0,93, \quad {}_{10}p_{x+10} = 0,88, \quad v^{10} = 0,8.$$

Wybierz odpowiedź najbliższą.

- (A) 25,8                      (B) 25,9                      (C) 26,0                      (D) 26,1  
(E) 26,2

3. Rozpatrujemy ubezpieczenie na dożycie do wieku 70 lat dla osób w wieku 40 lat z populacji de Moivre'a, w której kobiety charakteryzuje parametr  $\omega^{(f)} = 100$ , a mężczyźni  $\omega^{(m)} = 80$ . Składka jest płacona przez cały okres ubezpieczenia w formie renty ciągłej.

Ubezpieczyciela obowiązuje zakaz rozróżniania płci w taryfie składek, więc kalkulację składki opiera na przewidywaniu, że wśród nabywców ubezpieczenia będzie 40% kobiet. Przy jakim udziale kobiet strata ubezpieczyciela (za cały okres ubezpieczenia, na moment wystawienia polisy) wyniesie 10% kosztów netto ubezpieczenia? Intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 52,7%      (B) 53,5%      (C) 54,3%      (D) 55,1%  
(E) 55,9%

4. Potraktujmy zakup przez  $(x)$  ubezpieczenia  $n$  –letniego na dożycie, za jednorazową składkę netto, jako inwestycję. W przypadku, gdy dożyje wieku  $x+n$ , zrealizowaną intensywność zwrotu (per annum ) oznaczmy przez  $\delta(x, n)$ .

Który z poniższych wzorów przedstawia prawdziwe przybliżenie przyrostu funkcji  $\delta(x, n)$  jej różniczką ?

$$(A) \quad \delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x, n) = \frac{\mu_{x+n} + \mu_x}{n} \Delta x + \frac{-\delta(x, n) + \delta + \mu_{x+n}}{n} \Delta n$$

$$(B) \quad \delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x, n) = \frac{\mu_{x+n} - \mu_x}{n} \Delta x + \frac{-\delta(x, n) + \delta + \mu_{x+n}}{n} \Delta n$$

$$(C) \quad \delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x, n) = \frac{\mu_{x+n} - \mu_x}{n} \Delta x + \frac{\delta(x, n) + \delta + \mu_{x+n}}{n} \Delta n$$

$$(D) \quad \delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x, n) = \frac{\mu_{x+n} + \mu_x}{n} \Delta x + \frac{-\delta(x, n) + \delta - \mu_{x+n}}{n} \Delta n$$

$$(E) \quad \delta(x + \Delta x, n + \Delta n) - \delta(x, n) = \frac{\mu_{x+n} - \mu_x}{n} \Delta x + \frac{-\delta(x, n) - \delta + \mu_{x+n}}{n} \Delta n$$

5. Osoba 65-letnia kupuje za jednorazową składkę netto dożywotnią rentę ciągłą wypłacającą świadczenie z intensywnością roczną 15 000 zł oraz jednorazowe świadczenie  $b(t)$  za śmierć w wieku  $(65+t)$  dla  $0 < t < 50$ . Ubezpieczenie to można w każdym momencie zamienić na rentę dożywotnią bez świadczenia śmiertelnego, wypłacającą z intensywnością roczną 18 000 zł. Podaj wysokość świadczenia śmiertelnego dla wieku 85 lat. Dane są  $\mu_{65+t} = \frac{1}{37,5-0,75t}$  oraz  $\delta = 0,04$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 64 500      (B) 66 000      (C) 67 500      (D) 69 000  
(E) 70 500

6. Za składkę jednorazową netto  $SJN$  ubezpieczony (65) kupuje polisę emerytalną, która wypłaca następująco:

- Póki żyje dostaje rentę ciągłą z intensywnością roczną 1 ,
- W chwili śmierci uposażeni dostają jednorazowo kwotę

$$c(t) = \left(1 - \frac{t}{35}\right) SJN.$$

Należy dodać, że ubezpieczony wylosowany jest z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega = 100$ . Oblicz  $SJN$ , jeśli wiadomo, że  $\bar{a}_{65} = 11$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 16,00            (B) 16,04            (C) 16,08            (D) 16,12  
(E) 16,16

7. Rozpatrujemy ciągły typ 20-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł oraz składką płaconą ze stałą intensywnością przez cały okres ubezpieczenia. Ubezpieczona populacja ma wykładniczy rozkład czasu trwania życia z parametrem  $\mu = 0,002$ , a intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,008$ . Roczna intensywność kosztów administracyjnych maleje równomiernie od 8% sumy ubezpieczenia w momencie wystawienia polisy do 2% w momencie wygaśnięcia polisy z tytułu dożycia. Wyznacz moment, w którym rezerwa na koszty administracyjne (na 1 polisę aktywną) osiągnie minimalną wartość. Wskaż najbliższą wartość (w latach).

- (A) 10,2                      (B) 10,6                      (C) 11,0                      (D) 11,4  
(E) 11,8



8. Rozpatrujemy ciągły typ bezterminowego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. Ubezpieczeni są mężczyznami z populacji wykładniczej ze śmiertelnością  $\mu^{(s)} = 0,02$ . Są oni narażeni na ryzyko zawału z intensywnością  $\mu^{(z)} = 0,05$ , lecz zawał nie jest śmiertelny, ale podnosi do końca życia ryzyko śmierci do poziomu  $\mu^{(zs)} = 0,08$ . Po pierwszym zawale kolejne zawały nie zmieniają już śmiertelności. Ubezpieczenie jest sprzedawane osobom, które jeszcze nie miały zawału. Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla oprocentowania  $\delta = 0,04$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 47 900      (B) 48 200      (C) 48 500      (D) 48 800  
(E) 49 100

**9.** Emerytura małżeńska typu  $E(a,b;c,d)$  działa następująco

- Gdy żyją oboje, ona ( $x$ ) otrzymuje  $a$  na początku roku, a on ( $y$ ) otrzymuje  $c$  na początku roku.
- Gdy żyje tylko ona ( $x$ ), to otrzymuje  $b$  na początku roku.
- Gdy żyje tylko on ( $y$ ), otrzymuje  $d$  na początku roku.

Liczby  $a,b,c,d$  są nieujemnymi parametrami polisy.

Wiadomo ponadto, że udział świadczeń dla niej w składce jednorazowej wynosi  $2/3$  całej składki. Dane są

$$\ddot{a}_{x:y} = 6, \quad \ddot{a}_{\overline{x:y}} = 12, \quad \ddot{a}_x = 10.$$

Oblicz parametr  $d$  dla polisy  $E(2,3;2,d)$ . Zakładamy, że ich życia są niezależne.

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3  
(E) 4

10. W planie emerytalnym typu „*Defined Contribution*” przez cały okres aktywności jest płacona składka emerytalna w formie renty ciągłej z intensywnością roczną 10 000 zł. Uczestnicy planu pochodzą z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu życia z parametrem  $\mu = 0,03$ . W stanie aktywnym uczestnikom grozi odejście z planu z przyczyny innej niż śmierć ze stałą roczną intensywnością  $\mu = 0,04$ . Osobom, które umierają lub wychodzą z planu przed przejściem na emeryturę, plan zwraca składki wraz z technicznym oprocentowaniem. Wszyscy uczestnicy wchodzi do planu w wieku 25 lat. Referencyjnym wiekiem emerytalnym jest 65 lat; po jego osiągnięciu wypłacana jest dożywotnia emerytura w formie renty ciągłej, a jej wysokość jest ustalana według zasad obowiązujących w ubezpieczeniu rentowym. Przy technicznym oprocentowaniu  $\delta = 0,05$  oblicz, o ile miesięcy trzeba opóźnić przejście na emeryturę, by otrzymywać świadczenie o 25% wyższe od referencyjnego. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 39                      (B) 41                      (C) 43                      (D) 45  
(E) 47

**LXVI Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	B	
5	C	
6	B	
7	A	
8	C	
9	A	
10	E	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.