

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXII Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 10 grudnia 2012 r.

1. Rozważamy populację, w której intensywność śmiertelności wyraża się wzorem

$$\mu_x = \frac{n}{100-x} \text{ dla } x < 100, \text{ gdzie } n > 0 \text{ jest parametrem.}$$

Mediana dalszego trwania życia ( $x$ ) wynosi

$$M(T(x)) = 0,26(100 - x).$$

Oblicz  $n$ . Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A) 2,0

(B) 2,1

(C) 2,2

(D) 2,3

(E) 2,4

**2. Rozważmy następujące trzy polisy emerytalne.**

- Polisa  $E_1$  dla (25) będzie wypłacać corocznie emeryturę w wysokości 1 począwszy od wieku (65); do tego czasu ubezpieczony będzie płacił składkę coroczną w odpowiednio dobranej wysokości netto  $P_1$ .
- Polisa  $E_2$  dla (25) będzie wypłacać corocznie emeryturę w wysokości 1 począwszy od wieku (67); do tego czasu ubezpieczony będzie płacił składkę coroczną w odpowiednio dobranej wysokości netto  $P_2$ .
- Polisa  $E_3$  dla (23) będzie wypłacać corocznie emeryturę w wysokości 1 począwszy od wieku (65); do tego czasu ubezpieczony będzie płacił składkę coroczną w odpowiednio dobranej wysokości netto  $P_3$ .

Dane są:

$$N_{23} = 574952, N_{25} = 513183, N_{65} = 24896, N_{67} = 19759.$$

Wówczas  $P_2/P_1$  oraz  $P_3/P_1$  wynoszą odpowiednio:

Wybrać wartości najbliższe.

(A)  $\frac{P_2}{P_1} = 0,785$  ;  $\frac{P_3}{P_1} = 0,888$

(B)  $\frac{P_2}{P_1} = 0,785$  ;  $\frac{P_3}{P_1} = 0,878$

(C)  $\frac{P_2}{P_1} = 0,775$  ;  $\frac{P_3}{P_1} = 0,878$

(D)  $\frac{P_2}{P_1} = 0,775$  ;  $\frac{P_3}{P_1} = 0,868$

(E)  $\frac{P_2}{P_1} = 0,765$  ;  $\frac{P_3}{P_1} = 0,868$

3. Rozpatrujemy ciągły typ bezterminowego ubezpieczenia na życie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł, ze składką płaconą przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością. Ubezpieczeni pochodzą z populacji de Moivre'a z parametrem  $\omega^{(f)} = 100$  dla kobiet oraz  $\omega^{(m)} = 80$  dla mężczyzn. Po wprowadzeniu zakazu rozróżniania płci w taryfie składek, ubezpieczyciel kalkulował składkę dla rocznika  $x=50$  przy założeniu, że wśród kupujących ubezpieczenie będzie 60% kobiet. Przewidywania te nie sprawdziły się i ubezpieczyciel ubezpieczył kohortę, która daje mu oczekiwaną wartość straty na 1 polisę, na moment jej wystawienia, w wysokości 3000 zł. Jaki był udział kobiet w ubezpieczonej grupie 50-latków?

Intensywność oprocentowania  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 45%                      (B) 47%                      (C) 49%                      (D) 51%  
(E) 53%

4. Rozważamy 25-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla  $(x)$ , wypłacające świadczenie śmiertelne na koniec roku śmierci.

Dla  $(x)$  równoważne są dwa ubezpieczenia z gwarantowanym wzrostem sumy ubezpieczenia. W obydwu bonus zwiększa sumę ubezpieczenia w końcu roku, przed ewentualną wypłatą świadczenia.

Pierwsze ubezpieczenia daje coroczny wzrost bieżącej sumy ubezpieczenia o 2,5%. Drugie powiększa co roku sumę ubezpieczenia o  $r\%$  wyjściowej kwoty świadczenia (sumy ubezpieczenia w momencie wystawienia polisy).

Obydwa ubezpieczenia wyceniono przy technicznej stopie 6,6%.

Wyznacz stopę waloryzacji  $r$  (podaj najbliższą wartość). Dane są:

Jednorazowe składki netto	stopa techniczna			
	6,6%	4,4%	4,2%	4,0%
$1000 \cdot A_{x:\overline{25} }^1$	200,34	262,43	269,32	276,45
$1000 \cdot A_{x:\overline{25} }^1$	103,17	173,77	182,30	191,27
$1000 \cdot (IA)_{x:\overline{25} }^1$	2490,13	3532,36	3650,53	3773,36

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 3,04%      (B) 3,14%      (C) 3,24%      (D) 3,34%  
 (E) 3,44%

5. Rozważmy 40-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (30). Składka regularna netto  $P = P_{30:\overline{40}|}$  płacona jest w formie renty życiowej 40-letniej. Dane są:

$$\ddot{a}_{30:\overline{40}|} = 16,62, \quad \ddot{a}_{67:\overline{3}|} = 2,75; \quad \frac{\pi_{37}^s}{P} = 0,675; \quad i = 5\%.$$

Oblicz  $\pi_{38}^s/P$ .

Wybierz odpowiedź najbliższą.

- (A) 0,73                      (B) 0,75                      (C) 0,77                      (D) 0,79  
(E) 0,81

6. W kontrakcie ciągłym ogólnego typu ewolucję rezerwy składek netto opisuje wzór:

$$V(t) = \frac{t}{20} - \frac{t^2}{1600} \text{ dla } t \in [0,80].$$

Oblicz  $t^*$  dla którego  $\pi^S(t^*)$  ma minimalną wartość na przedziale  $[0,80]$ .

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ .

Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A) 30  
(E) 70

(B) 40

(C) 50

(D) 60

7. Rozważamy dyskretny model  $n$ -letniego ubezpieczenia na życie ze stałą składką, płaconą na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Na koniec  $k$ -tego roku ubezpieczenia (przed zapłaceniem składki za następny rok) ubezpieczyciel obliczył zysk inwestycyjny przypadający ubezpieczonemu i zaproponował trzy równoważne sposoby jego wykorzystania:

1. wzrost sumy ubezpieczenia oraz przyszłych składek o  $z_1$  punktów procentowych,
2. wzrost sumy ubezpieczenia o  $z_2$  punktów bez zmiany przyszłych składek,
3. spadek przyszłych składek o  $z_3$  punktów bez zmiany sumy ubezpieczenia.

Ubezpieczony postanowił podzielić bonus inwestycyjny na dwie równe części i wykorzystać je na opcję drugą i trzecią. Oznaczając przez  $\tilde{z}_2$  uzyskany wzrost sumy ubezpieczenia oraz przez  $\tilde{z}_3$  spadek przyszłych składek, wyznacz  $\left| \frac{\tilde{z}_3}{\tilde{z}_2} \right|$ .

Dane są:

$$\begin{array}{lll} M_x = 1\,242 & M_{x+k} = 467 & M_{x+n} = 172 \\ N_x = 71\,070 & N_{x+k} = 10\,640 & N_{x+n} = 2\,095 \end{array}$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 1,65                      (B) 1,80                      (C) 1,95                      (D) 2,10  
(E) 2,25



8. Ona (40) wylosowana jest z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_k = 130$  ; natomiast on (20) jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_m = 110$ . Obliczyć liczbę lat  $z$ , która spełnia warunek:

$$\Pr\{|T(40) - T(20)| \geq z \mid \min [T(40), T(20)] \geq z\} = \frac{1}{4}.$$

Zakładamy, że ich życia są niezależne.

- (A) 22                      (B) 24                      (C) 26                      (D) 28  
(E) 30

9. Rozważamy ciągły typ bezterminowego ubezpieczenia na życie ( $x$ ) ze składką płaconą ze stałą intensywnością przez pierwsze 20 lat ubezpieczenia. W zależności od rodzaju śmierci ubezpieczenie wypłaca:

200 000 za śmierć w nieszczęśliwym wypadku (NW),

50 000 za śmierć wywołaną przez określone choroby (CH),

100 000 za śmierć z pozostałych przyczyn (PP).

Wiadomo, że bezwarunkowe prawdopodobieństwo śmierci w populacji, z której pochodzi ubezpieczony, opisuje funkcja  ${}_tq_x = 1 - 0,92^t$ , a ponadto  $4\mu_{x+t}^{(NW)} = 3\mu_{x+t}^{(CH)} = \mu_{x+t}^{(PP)}$ .

Wyznacz roczną intensywność składki w tym ubezpieczeniu dla  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 9 430                      (B) 9 560                      (C) 9 690                      (D) 9 820  
(E) 9 950

10. Rozpatrujemy plan emerytalny, wypłacający miesięczną emeryturę w wysokości 2,5% wynagrodzenia z ostatniego miesiąca pracy za każdy skończony rok stażu. 55-letni uczestnik z 25 letnim stażem, jeśli dożyje do wieku emerytalnego, będzie miał 65,5 lat oraz będzie zarabiał 4 000 zł miesięcznie. Wyznacz obecną wartość emerytury tego uczestnika, jeśli wiadomo, że za rok wartość ta będzie o 6,1% wyższa.

Dane są:

$${}_t p_{55} = \frac{\omega - 55 - t}{\omega - 55} \quad \ddot{a}_{55+t}^{(12)} = 44 - \frac{4t}{5} \quad v = 0,96.$$

Wskaż najbliższą wartość

- (A) 785 000      (B) 788 000      (C) 791 000  
(D) 794 000      (E) 797 000

**LXII Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	A	
3	C	
4	C	
5	D	
6	D	
7	E	
8	E	
9	A	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.