

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXX Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 23 marca 2015 r.

1. Rozważamy (25), wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega$  który za pomocą renty życiowej ciągłej będzie płacił składkę emerytalną ze stałą intensywnością netto  $\bar{P}$  aż do wieku  $p$ , kiedy zacznie otrzymywać emeryturę w formie renty dożywotniej z intensywnością netto  $\bar{E}$ .

Wiadomo, że dożyje on emerytury z prawdopodobieństwem  $3/4$ . Ponadto wiadomo, że średni czas przebywania na emeryturze (tych, którzy na nią przeszli) wynosi 18 lat.

Oblicz  $\bar{E}/\bar{P}$ . Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 1,66                      (B) 1,71                      (C) 1,76                      (D) 1,81  
(E) 1,86

2. Rozważamy dwie polisy  $Pol_1$  oraz  $Pol_2$ , które mogą być wystawione na (40) wylosowanego z populacji wykładniczej z  $\mu \equiv 0,02$ . Obie polisy są aktuarialnie równoważne tzn. składki jednorazowe netto są identyczne.
- W przypadku  $Pol_1$  suma ubezpieczenia rośnie liniowo w pierwszym roku od 0 do 1 i później wynosi 1.
- W przypadku  $Pol_2$  suma ubezpieczenia rośnie liniowo przez pierwsze dwa lata od wartości  $a$  do 1 i później wynosi 1.
- Obie polisy są bezterminowe i wypłacają świadczenia w chwili śmierci. Oblicz  $a$ .
- Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ .
- (A) 0,45                      (B) 0,46                      (C) 0,47                      (D) 0,48  
(E) 0,49

3. Osoba 40-letnia kupiła za 99 040 zł ubezpieczenie, które zacznie wypłacać po 25 latach ciągłą rentę z intensywnością 50 000 zł na rok przez następne 20 lat. Osoba o 10 dni starsza kupiła taką samą rentę, która zacznie po 25 latach i 1 miesiącu wypłacać świadczenia, także przez 20 lat. Podaj, o ile zł mniej zapłaci osoba starsza. Dane są:  $\delta = 0,05$ ;  $\mu_{40} = 0,0085$ ;  ${}_{25}p_{40} = 0,73625$   ${}_{20}p_{65} = 0,25034$ .  
Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 982,50      (B) 997,50      (C) 1012,50      (D) 1017,5  
(E) 1032,50

4. Rozważamy ciągły typ ubezpieczenia z jednorazową składką netto dla osoby z populacji o wykładniczym rozkładzie trwania życia z parametrem  $\mu = 0,02$ . Na osobę 60-letnią wystawiono ubezpieczenie na dożycie do wieku 80 lat z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. W dowolnym momencie  $t < 20$  ubezpieczony ma prawo zmienić warunki ubezpieczenia w taki sposób, że jego świadczenie za dożycie zostanie zredukowane do 60 000 zł, a od momentu  $t$  rozpoczną się ze stałą intensywnością  $r(t)$  wypłaty z renty życiowej do wieku 80 lat. Podaj roczną intensywność wypłat z renty, jeśli zmiana warunków ubezpieczenia dokonana zostanie w wieku 75 lat. Oprocentowanie techniczne  $\delta = 0,03$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 7 042      (B) 7 057      (C) 7 072      (D) 7 087  
(E) 7 102

5. Rozważamy polisę ciągłą wypłacającą 1 w chwili śmierci, wystawioną (30) wylosowanemu z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_m = 80$ . Niech  $Z_m$  oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Podobnie, rozważamy polisę ciągłą wypłacającą 1 w chwili śmierci, wystawioną (25) wylosowanej z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega_k = 100$ . Niech  $Z_k$  oznacza wartość obecną świadczenia na moment wystawienia polisy. Załóżmy dodatkowo, że obie polisy wystawiono jednocześnie oraz, że ich życia są niezależne.

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,04$ .

Oblicz

$$\Pr \left\{ \frac{Z_m}{Z_k} \in \left( \frac{1}{2} ; 2 \right) \right\}$$

Wskaż odpowiedź najbliższą.

- (A) 0,36                      (B) 0,38                      (C) 0,40                      (D) 0,42  
(E) 0,44

6. Rozważamy ciągły kontrakt ogólnego typu, dotyczący ( $x$ ) wylosowanego z populacji Weibulla  $\mu_x = 0,0001x$  dla  $x > 0$ . O funkcji  $c(t)$  zakładamy, że jest ciągła; natomiast  $\pi(t) \equiv 1,23$  dla  $t > 0$ . Kontrakt jest bezterminowy, ale jego parametry są tak dobrane, że

$$\delta V(t) = 1,25(c(t) - V(t))\mu_{x+t}$$

dla  $t \in [0; 30]$ . Oblicz  $V(20)$ . Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ . Podaj najbliższą odpowiedź.

- (A) 27,23      (B) 27,53      (C) 27,83      (D) 28,13  
(E) 28,43

7. Rozważamy dyskretny typ 30-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł. Składka jest płacona przez cały okres ubezpieczenia i wynosi 4 789 zł rocznie w ujęciu brutto, w tym 2 594 zł to składka netto. Oprócz stałych kosztów inkasa składki ubezpieczyciel poniósł jednorazowe koszty akwizycji oraz ponosi przez cały okres ważności ubezpieczenia stałe koszty administracyjne (na początku każdego roku). W pierwszym roku wydatki akwizycyjne oraz administracyjne wyniosły 5 150 zł.

Wiadomo, że po 15 latach ubezpieczenia rezerwa brutto osiągnęła poziom 37 983 zł, a rezerwa netto 39 993 zł. Przyjmując oprocentowanie techniczne  $i=3\%$ , wyznacz wysokość kosztów inkasa składki ( w punktach procentowych składki brutto). Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 4,0                      (B) 4,1                      (C) 4,2                      (D) 4,3  
(E) 4,4

8. Rozważamy emeryturę małżeńską dla niej ( $x$ ), wylosowanej z populacji wykładniczej z  $\mu_x \equiv 0,01$  oraz dla niego ( $y$ ), wylosowanego niezależnie z populacji wykładniczej z  $\mu_y \equiv 0,02$ . Po pierwsze, ubezpieczenie polega na tym, że przez najbliższe 35 lat (lub krócej) będą płacić składkę w formie renty życiowej ciągłej tylko wtedy, gdy żyją oboje. Niech  $\bar{P}$  oznacza roczną inensywność składki netto. Po 35 latach zacznie być wypłacana emerytura, w formie renty życiowej ciągłej, która płaci z intensywnością 1 na rok, gdy żyje przynajmniej jedna osoba. Ponadto, w przypadku, gdy jedna z osób umrze w ciągu najbliższych 35 lat, druga owdowiała będzie pobierać rentę wdowią ciągłą z intensywnością 0,5 na rok, ale na pewno nie dłużej niż do końca pierwszych 35 lat (lub krócej w przypadku śmierci owdowiałej osoby).

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,05$ . Oblicz  $\bar{P}$ . Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,31                      (B) 0,35                      (C) 0,39                      (D) 0,43  
(E) 0,47

9. Program aktywizacji zawodowej bezrobotnych trwa 7 lat i składa się z 3-letniego etapu szkolenia oraz 4-letniego etapu wspierania uczestników w poszukiwaniu pracy. Przystępujący do programu są objęci ubezpieczeniem, które wypłaca świadczenia jedynie tym, którzy przeszli do drugiego etapu i tylko za zdarzenia w okresie trwania drugiego etapu. Ubezpieczenie wypłaca 100 000 zł w przypadku śmierci uczestnika lub 50 000 w przypadku znalezienia pracy. Świadczenie jest wypłacane w momencie zdarzenia i ważność ubezpieczenia wygasa.

W etapie szkolenia ubytki uczestników są wywołane śmiercią lub rezygnacją. Dane na temat ubytków w tej fazie pochodzą z tablic niezależnych ubytków. Intensywność śmiertelności wynosi  $\mu^{(d_1)} = 0,01$  na rok, a średnia (centralna) stopa rezygnacji  $m^{(w)} = 0,15$  rocznie. Rezygnacje mają jednostajny rozkład w ciągu roku.

Dane na temat drugiego etapu uwzględniają wykluczanie się ubytków.

Intensywność śmiertelności wynosi  $\mu^{(d_2)} = 0,02$  rocznie, a intensywność znalezienia pracy  $\mu^{(e)} = 0,20$  rocznie.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie dla intensywności oprocentowania  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 15 550            (B) 15 620            (C) 15 690            (D) 15 760  
(E) 15 830

10. Otwarty plan emerytalny oferuje osobom, które przechodzą na emeryturę, natychmiastowe świadczenie emerytalne wypłacane dożywotnio w formie renty ciągłej. Umowa z zakładem emerytalnym gwarantuje, że w przypadku śmierci wypłaty będą trwać tak długo, aż przekroczą połowę wpłaconego kapitału. Wyznacz długość okresu gwarancyjnego (w latach), jeśli ubezpieczeni mają 67 lat i pochodzą z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 92 lata. Techniczne oprocentowanie wynosi  $\delta = 0,02$ . Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 5,22                      (B) 5,42                      (C) 5,62                      (D) 5,82  
(E) 6,02

**LXX Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja•
1	D	
2	E	
3	A	
4	A	
5	D	
6	A	
7	E	
8	C	
9	B	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.  
• Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.