Zadanie 1

Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_5, X_6, \ldots, X_{20}$ są niezależne, o jednakowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i wariancji 4, oraz przyjmijmy oznaczenia:

$S_5 = X_1 + \ldots + X_5$,

$S_{20} = X_1 + \ldots + X_{20}$.

Wtedy $E(S_5^2 \mid S_{20} = 16)$ jest równa

(A) 16

(B) 15

(C) 31

(D) 51

(E) 26

Zadanie 2

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & dla \quad x>0 \\ 0 & dla \quad x\le 0 \end{cases}$$

Niech:
Z - oznacza część całkowitą X (część całkowita liczby x to największa liczba całkowita n taka, że $n \le x$)
U - oznacza część ułamkową liczby X, zatem $U = X - Z$.
Wtedy wartość oczekiwana $E(ZU)$ jest równa

(A) $\dfrac{1}{2(e-1)}$

(B) $\dfrac{e-2}{e(e-1)}$

(C) $\dfrac{e-2}{(e-1)^2}$

(D) $\dfrac{e-2}{e-1}$

(E) $\dfrac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

Zadanie 3

Załóżmy, że dla danej wartości $\Theta = \theta$, zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są warunkowo niezależne i mają dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(X_i = 1 \mid \theta) = \theta, \qquad P(X_i = 0 \mid \theta) = 1-\theta .$$

Zmienna losowa Θ ma rozkład na przedziale $[0,1]$ o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & dla \quad 0<\theta<1; \\ 0 & w \; przeciwnym \; przypadku. \end{cases}$$

Niech

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{, gdzie } n>1 \text{ jest ustaloną liczbą całkowitą.}$$

Wyznaczono predyktor bayesowski $\hat{X}_{n+1}(Y)$ zmiennej losowej X_{n+1} na podstawie zmiennej Y przy kwadratowej funkcji straty.
Błąd średniokwadratowy otrzymanego predyktora, czyli

$$E\left(\hat{X}_{n+1}(Y) - X_{n+1}\right)^2,$$

jest równy

(A) $\dfrac{n^2+9n+20}{5(n+4)^2}$

(B) $\dfrac{n^2+10n+20}{5(n+4)^2}$

(C) $\dfrac{n^2+5n+20}{5(n+4)^2}$

(D) $\dfrac{1}{5(n+4)}$

(E) $\dfrac{n+16}{5(n+4)^2}$

Zadanie 4

W urnie znajduje się $r = 25$ kul, z których $m = 15$ jest białych i $r - m = 10$ czarnych. Losujemy *bez zwracania* najpierw $n_1 = 6$ kul, a następnie spośród kul *pozostałych* w urnie, losujemy *bez zwracania* $n_2 = 9$ kul. Niech

- S_1 oznacza liczbę białych kul wybranych w pierwszym losowaniu,
- S oznacza liczbę białych kul wybranych w obu losowaniach.

Oblicz $Cov(S_1, S)$.

(A) $Cov(S_1, S) = 1{,}14$

(B) $Cov(S_1, S) = -0{,}54$

(C) $Cov(S_1, S) = 0{,}60$

(D) $Cov(S_1, S) = 0{,}90$

(E) $Cov(S_1, S) = -0{,}36$

Zadanie 5

Niech $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z następującymi parametrami: nieznaną wartością oczekiwaną $EX_i = m_X$, $EY_i = m_Y$, wariancją $VarX_i = 1$ i $VarY_i = 2$ oraz współczynnikiem korelacji $Corr(X_i,Y_i) = 0$. Testem jednostajnie najmocniejszym weryfikujemy hipotezę $H_0 : m_X = 1, m_Y = 2$ przy alternatywie $H_1 : m_X = 2, m_Y = 1$ na poziomie istotności 0,05. Jak najmniej liczną próbą należy dysponować, aby moc otrzymanego testu była nie mniejsza niż 0,95?

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

(E) 11

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,1], zaś N jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\dots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$.

Niech

$$M_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy $E(M_N)$ jest równa

A) $\dfrac{p - p^3}{2}$

(B) $\dfrac{p + p^2}{2}$

(C) $\dfrac{1 + p - 2p^2}{2}$

(D) $\dfrac{p + p^2 - 2p^3}{2}$

(E) $\dfrac{p + p^2 - p^3}{2}$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_5, Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Osobno na podstawie prób losowych $X_1, X_2, \ldots, X_5$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ zbudowano dwa przedziały ufności dla parametru θ, każdy na poziomie ufności 0,8, każdy postaci $[aT, bT]$, gdzie T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ w oparciu o odpowiednia próbkę i a, b są stałymi dobranymi tak, aby dla każdego $\theta > 0$

$P_\theta(\theta < aT) = P_\theta(\theta > bT) = 0{,}1$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak zbudowane przedziały okażą się rozłączne.

(A) 0,0500

(B) 0,0395

(C) 0,0790

(D) 0,0732

(E) 0,0366

Zadanie 8

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o nieznanej wartości oczekiwanej $\lambda > 0$. Nie obserwujemy zmiennej X ale zmienną Y równą X, gdy X>1. W wyniku tej obserwacji otrzymujemy n-elementową prosta próbę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Rozważamy estymator parametru $\lambda > 0$ postaci

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\,, \text{ gdzie } Z_i = \begin{cases} Y_i & gdy\ Y_i > 2 \\ 0 & gdy\ Y_i \le 2 \end{cases}$$

Okazuje się, że jest to estymator nieobciążony parametru λ. Wariancja tego estymatora jest równa

(A) $\dfrac{\lambda}{n}$

(B) $\dfrac{\lambda^2}{n(e^{\lambda}-1)}$

(C) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\lambda^3}{e^{\lambda}-1-\lambda}+\lambda\right)$

(D) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\lambda^2}{e^{\lambda}-1-\lambda}+\lambda\right)$

(E) $\dfrac{\lambda^2}{n(e^{\lambda}-1-\lambda)}$

Zadanie 9

Zmienna losowa N ma rozkład geometryczny postaci

$$P(N=k)=\left(\frac{1}{4}\right)^k\frac{3}{4} \text{ dla } k=0,1,2,\ldots.$$

Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N. Każda ze zmiennych losowych X_i ma ten sam rozkład o parametrach

$$EX=1, \quad E\left(X^2\right)=2, \quad E\left(X^3\right)=4.$$

Niech

$$S_N=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} X_i & gdy \quad N>0 \\ 0 & gdy \quad N=0\end{cases}.$$

Współczynnik asymetrii $\frac{E\left(S_N-ES_N\right)^3}{\left(VarS_N\right)^{3/2}}$ jest równy

(A) 1,944

(B) 3,672

(C) 0

(D) 1,269

(E) 3,024

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f_{\lambda,\theta}(x) = \frac{\theta\lambda^{\theta}}{(\lambda + x)^{\theta+1}} ,$$

gdzie $\lambda, \theta > 0$ są nieznanymi parametrami.

Niech $\hat{\lambda}_n, \hat{\theta}_n$ oznaczają estymatory największej wiarogodności parametrów odpowiednio λ i θ w oparciu o próbę $X_1, X_2, ..., X_n$.
Wtedy przy $\lambda = 1, \theta = 4$ granica

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\sqrt{n}\left|\hat{\lambda}_n - 1\right| > \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

jest równa

(A) 0

(B) 0,8415

(C) 0,3173

(D) 0,1336

(E) 0,9512

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 marca 2014 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	C	
5	B	
6	D	
7	D	
8	C	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.