

**Zadanie 1**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_6$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją  $\frac{1}{\theta}$ , gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr  $\theta$  ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \beta^3 \theta^2 \exp(-\beta\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases},$$

gdzie  $\beta > 0$  jest znane. Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru  $\frac{1}{\theta}$  postaci  $[a, b]$ , taki że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0,05,$$

gdzie  $\Pi(\cdot \mid x)$  oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa  $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ . Tak otrzymany przedział jest równy

$$(A) \left[ \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{12,59}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{1,64} \right]$$

$$(B) \left[ \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{7,81}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{0,35} \right]$$

$$(C) \left[ \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{16,92}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{3,33} \right]$$

$$(D) \left[ \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{21,03}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{5,23} \right]$$

$$(E) \left[ \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{28,87}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{9,39} \right]$$

**Zadanie 2**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o funkcji gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem.

Rozważamy dwa estymatory funkcji  $g(\theta) = P_{\theta}(X_1 > 1) = e^{-\theta}$ :

- $T_{1,n}$  - estymator największej wiarygodności w oparciu o próbę  $X_1, X_2, \dots, X_n$
- $T_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i > 1)$ , gdzie funkcja  $\mathbf{1}(x > 1) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

Niech  $V_i$  oznacza wariancję asymptotyczną estymatora  $T_{i,n}$ ,  $i = 1, 2$ .

Wtedy stosunek  $\frac{V_1}{V_2}$  jest równy

(A)  $\frac{1}{\theta^2(e^{\theta} - 1)}$

(B)  $\frac{\theta^2 e^{-\theta}}{e^{\theta} - 1}$

(C)  $\frac{\theta^2}{e^{\theta} - 1}$

(D)  $\frac{\theta}{e^{\theta} - 1}$

(E)  $\frac{1}{\theta^2 e^{\theta}}$

**Zadanie 3**

Niech  $N, Y_1, Y_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym  $\Theta = \theta$ . Zmienne  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , mają warunkowe rozkłady dwupunktowe  $P(Y_i = 1 | \theta) = \theta = 1 - P(Y_i = 0 | \theta)$ . Warunkowy rozkład zmiennej losowej  $N$  przy danym  $\Theta = \theta$  jest rozkładem ujemnym dwumianowym o funkcji prawdopodobieństwa  $P(N = n | \theta) = (n+1)\theta^2(1-\theta)^n$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Rozkład brzegowy zmiennej  $\Theta$  jest rozkładem beta o gęstości

$$f(\theta) = \begin{cases} 12\theta^2(1-\theta) & \text{gdy } \theta \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech  $X_i, i = 1, 2, \dots$ , będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1, niezależnymi od zmiennych  $N, Y_1, Y_2, \dots$

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Oblicz współczynnik kowariancji  $Cov(S, T)$ .

- (A) 2,8
- (B) 3,6
- (C) 1,6
- (D) 0,8
- (E) 4,4

**Zadanie 4**

Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } 0 < y < x < +\infty \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech  $U = Y - X$  i  $V = 2Y + X$ .

Wtedy  $E(V | U = -2)$  jest równa

- (A) 5
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 2

**Zadanie 5**

Niech  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}.$$

Wtedy

$$E(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \mid \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = t),$$

gdzie  $t$  jest ustaloną liczbą dodatnią, jest równa

- (A)  $\frac{n+2t-1}{2}$
- (B)  $(2n-1)t+n-1$
- (C)  $nt+n-1$
- (D)  $(2n-1)t+n^2-1$
- (E)  $\frac{(n+1)t+n-1}{2}$

**Zadanie 6**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_9$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(m_1, \sigma^2)$ , a  $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$  niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(m_2, \sigma^2)$ . Wszystkie zmienne są niezależne, a parametry  $m_1, m_2, \sigma$  są nieznane. Testujemy hipotezę  $H : m_1 = m_2$  przy alternatywie  $K : m_1 \neq m_2$ . Hipotezę  $H$  odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S} > c,$$

gdzie  $\bar{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Y_i$  i  $S^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (X_i - Y_i)^2$ .

Wyznacz  $c$  tak, aby rozmiar testu był równy 0,05.

- A) 0,754
- (B) 0,399
- (C) 0,787
- (D) 0,632
- (E) 0,547

**Zadanie 7**

Rzucono niezależnie 16 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskano mniej niż 6 serii, jeśli wiadomo, że uzyskano 10 orłów i 6 reszek.

(A)  $\frac{48}{1001}$

(B)  $\frac{47}{1001}$

(C)  $\frac{44}{1001}$

(D)  $\frac{46}{1001}$

(E)  $\frac{45}{1001}$

**Uwaga.** Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu :  $aaabbbbaabbbba$  jest 5 serii (3 serie elementów typu  $a$  i 2 serie elementów typu  $b$ ).

**Zadanie 8**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(a, b)$ , gdzie  $a, b$  są nieznanymi i  $a < b$ .

Rozważamy rozstęp równy

$$T = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

jako estymator długości przedziału  $b - a$ . Błąd średniokwadratowy tego estymatora, czyli  $E_{a,b}(T - b + a)^2$ , jest równy

(A)  $\frac{2n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(B)  $\frac{4(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

(C)  $\frac{2(3n+4)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(D)  $\frac{2(2n+1)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(E)  $\frac{6(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$



**Zadanie 9**

Niech  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ma rozkład logarymiczno-normalny  $LN(bx_i, 1)$ , gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są znanymi liczbami, a  $b$  jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 9$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,01 weryfikujemy hipotezę  $H_0 : b = 1$  przy alternatywie  $H_1 : b > 1$ . Wtedy prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju przy alternatywie  $b = 2$  jest równe

- (A) 0,16
- (B) 0,35
- (C) 0,25
- (D) 0,01
- (E) 0,09

**Zadanie 10**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla  $x > 0$  wzorem:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych  $X_i$ , tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol  $\lceil a \rceil$  oznacza najmniejszą liczbą całkowitą  $k$  taką, że  $a \leq k$ ).

Niech  $S = \sum_{i=1}^n Z_i$ .

Oblicz estymator *największej wiarygodności*  $\hat{\lambda}$  nieznanego parametru  $\lambda$  oparty na obserwacjach  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

(A)  $\hat{\lambda} = \ln\left(\frac{S}{n} - 1\right)$

(B)  $\hat{\lambda} = \frac{n}{S}$

(C)  $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil$

(D)  $\hat{\lambda} = \frac{S}{n}$

(E)  $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	C	
3	B	
4	A	
5	B	
6	D	
7	B	
8	E	
9	C	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.