Zadanie 1

W urnie znajdują się kule, z których każda jest oznaczona jedną z liter alfabetu:

- 10 kul oznaczonych literą A,
- 20 kul oznaczonych literą B,
- 30 kul oznaczonych literą C,
- x kul oznaczonych innymi literami alfabetu.

Losujemy *bez zwracania* 9 kul z urny. Zmienne losowe N_A, N_B, N_C oznaczają, odpowiednio, liczbę wylosowanych kul z literami A,B,C.

Jakie musi być x, aby zmienne losowe $N_A + N_B$ oraz $N_B + N_C$ były *nieskorelowane*?

(A) $x = 20$

(B) $x = 24$

(C) $x = 15$

(D) $x = 12$

(E) $x = 9$

Zadanie 2

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa X_i ma rozkład o wartości oczekiwanej m i wariancji im^2, i=1,2,3,4, gdzie $m \neq 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\hat{m}$ oznacza estymator parametru m minimalizujący błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4,$$

gdzie współczynniki $a_i \in R, i = 1,2,3,4$.

Wtedy $E_m(\hat{m} - m)^2$ jest równe

(A) $\frac{5}{8}m^2$

(B) $\frac{12}{25}m^2$

(C) $\frac{1}{2}m^2$

(D) $\frac{3}{8}m^2$

(E) $\frac{12}{37}m^2$

Zadanie 3

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0,5, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. Obie zmienne są niezależne. Oblicz medianę rozkładu warunkowego $Med(X \mid X+Y=3)$.

(A) $\ln\left(\frac{1+e^{1,5}}{2}\right)$

(B) $-\ln\left(\frac{1+e^{-2}}{2}\right)$

(C) $2\ln\left(\frac{1+e^{1,5}}{2}\right)$

(D) $-\ln\left(\frac{1+e^{-3}}{2}\right)$

(E) $\frac{1}{2}$

Zadanie 4

Dysponujemy dwiema urnami. W urnie I mamy jedną kulę białą i jedną czarną, w urnie II mamy dwie kule białe i jedną czarną. Powtarzamy n razy eksperyment polegający na tym, że losujemy jedną kulę z urny I, nie oglądając jej wkładamy ją do urny II, następnie losujemy jedną kulę z urny II i nie oglądając jej wkładamy ją do urny I. Niech X_n oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po n doświadczeniach. Wtedy $\lim_{n \to \infty} E(X_n X_{n+1})$ jest równa

(A) $\frac{63}{40}$

(B) $\frac{37}{24}$

(C) $\frac{11}{8}$

(D) $\frac{23}{24}$

(E) 1

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienne losowe X_i $i = 1,2,\ldots m$ mają rozkład Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

a X_i, $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$g_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\sqrt{x}} e^{-2\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n}$ testem jednostajnie najmocniejszym, na poziomie istotności 0,05, weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_0 : \theta > 1$. Przy $m = 6$ i $n = 4$ moc testu dla alternatywy $\theta = 2$ jest równa

(A) 0,8915

(B) 0,6430

(C) 0,7351

(D) 0,9994

(E) 0,4584

Zadanie 6

Niech X_1 będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1), X_2 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_1)$, X_3 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_2)$ i tak dalej. Niech N oznacza zmienną losową, taką że

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!(e^\lambda - 1)} \quad \text{gdy} \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest ustaloną liczbą. Zmienna N jest niezależna od zmiennych $X_1, X_2, X_3, \ldots$.

Wtedy $E(N! X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N)$ jest równa

(A) $\dfrac{e^\lambda - 1 - \lambda}{\lambda(e^\lambda - 1)}$

(B) $e^\lambda + 1$

(C) $\dfrac{\lambda(e^\lambda - 1 - \lambda)}{e^\lambda - 1}$

(D) 1

(E) $\dfrac{e^\lambda(1 + \lambda)}{\lambda(e^\lambda - 1)}$

Zadanie 7

Zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX = 0,\ EY = EZ = 1$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var(X(Y+Z))$.

(A) 12

(B) 13

(C) 16

(D) 17

(E) 18

Zadanie 8

Rozważamy proces autoregresji postaci

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,...,T \ ,$$

gdzie zmienne ε_t są niezależne o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1, X_0 jest ustalonym znanym parametrem, $\rho \in R$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że ρ ma rozkład a priori równy rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej 0,5 i wariancji 0,25. Zmienne ρ i ε_t, $t = 1,2,...,T$ są niezależne. Wyznacz estymator bayesowski parametru ρ na podstawie próby $X_1, X_2,..., X_T$ przy kwadratowej funkcji straty.

(A) $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} + 1}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2 + 2}$

(B) $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} + 2}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2 + 4}$

(C) $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} + 1}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2 + 2}$

(D) $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} + 2}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2 + 4}$

(E) $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t X_{t-1} + 0{,}5}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2 + 0{,}25}$

Zadanie 9

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Laplace'a o gęstości

$$f_\theta(x) = \exp\left(-2|x-\theta|\right) \quad \text{dla } x \in R,$$

gdzie θ jest nieznanym parametrem rzeczywistym. Rozważamy estymator $\hat{\theta}$ parametru θ równy medianie z próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$\hat{\theta} = X_{[0,5n]:n}.$$

W oparciu o ten estymator budujemy przedział ufności dla parametru θ postaci

$$\left(\hat{\theta} - a, \hat{\theta} + a\right),$$

gdzie a dobrane jest tak, aby dla każdego $\theta \in R$

$$\lim_{n\to+\infty} P_\theta\left(\theta \in \left(\hat{\theta} - a, \hat{\theta} + a\right)\right) = 0{,}95.$$

Wtedy a jest równe

(A) $\dfrac{3{,}28}{\sqrt{n}}$

(B) $\dfrac{0{,}82}{\sqrt{n}}$

(C) $\dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}}$

(D) $\dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}$

(E) $\dfrac{3{,}92}{\sqrt{n}}$

Zadanie 10

Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym takim, że

$$P(N=n)=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots,$$

zaś $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ będą zmiennymi losowymi niezależnymi od N i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda ze zmiennych X_i ma rozkład Bernoulli'ego: $P(X_i=1)=p$ i $P(X_i=0)=q$, gdzie $p+q=1$, $0<p<1$.

Niech $N_1=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} X_i & gdy\ N>0\\ 0 & gdy\ N=0\end{cases}$ i $N_0=N-N_1$.

Wtedy $E\left[\frac{N_1}{N_0+1}\right]$ jest równa

(A) $\frac{7p}{16q}$

(B) $\frac{p}{q}$

(C) $\frac{p}{q}\left[1-\left(\frac{3}{4-q}\right)^2\right]$

(D) $\frac{p}{q}\left[1-\left(\frac{3}{4-p}\right)^2\right]$

(E) $\frac{2p}{3(q+1)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	E	
3	D	
4	A	
5	B	
6	A	
7	D	
8	B	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.