Zadanie 1

Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ są niezależne i mają rozkłady normalne $X_i \sim N(m\sqrt{i}, i)$, $i = 1,2,\ldots,16$, zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : m = 0$ przy alternatywie $H_1 : m > 0$ na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości okazało się, że wektor $(X_1, X_2, \ldots, X_{16})$ ma rozkład normalny taki, że $EX_i = m\sqrt{i}$, $VarX_i = i$, $i = 1,2,\ldots,16$, oraz współczynnik korelacji

$$\rho(X_i, X_j) = \begin{cases} 0{,}5 & gdy \quad |i - j| = 1 \\ 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & w\ pp \end{cases} .$$

Wyznaczyć rzeczywisty rozmiar testu.

(A) 0,09

(B) 0,12

(C) 0,21

(D) 0,17

(E) 0,02

Zadanie 2

Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{2}$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dla $n = 1,2,\ldots$.

Niech Y będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1,\ldots,X_n,\ldots$, o rozkładzie gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} 32x^2\exp(-4x) & gdy\ \ x > 0 \\ 0 & gdy\ \ x \le 0 \end{cases}.$$

Niech

$$N = \max\{n \ge 0 : T_n \le Y\}.$$

Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej N.

(A) $P(N=n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(B) $P(N=n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(C) $P(N=0) = \frac{8}{27}$, $P(N=n) = \frac{19}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ dla $n = 1,2,\ldots$

(D) $P(N=n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(E) $P(N=n) = \exp(-2)\frac{2^n}{n!}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

Zadanie 3

Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x|) & gdy \ \ x \in [-\theta, \theta] \\ 0 & gdy \ \ x \notin [-\theta, \theta], \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarogodności na poziomie istotności 0,20. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 4$ jest równa

(A) 0,80

(B) 0,74

(C) 0,65

(D) 0,40

(E) 0,37

Zadanie 4

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1.

Niech $U = -\ln\left(\frac{X}{Y}\right)$. Wtedy

(A) zmienne U i Y są niezależne

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej U wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} \quad \text{dla } u \in R$$

(C) $P(U > 0) = \frac{1}{3}$

(D) $E(Y \mid U = 1) = \frac{e}{1+e}$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej U wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{2e^{u}}{(1+e^{u})^2} \quad \text{dla } u > 0$$

Zadanie 5

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$, a zmienna losowa N ma rozkład postaci

$$P(N=n) = e^{-2}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ i N są niezależne.

Niech $M_N = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ i $z \in (0,1)$. Wtedy $E(M_N \mid X_1 = z)$ jest równa

(A) $\dfrac{1-2z+(2z+1)e^{2(z-1)}}{2}$

(B) $1-\dfrac{1-e^{z-1}}{e^2}$

(C) $1-\dfrac{1-e^{2(z-1)}}{e^2}$

(D) $\dfrac{e^{2(z-1)}}{2}$

(E) $1-\dfrac{1-e^{2(z-1)}}{2}$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład o wartości oczekiwanej 2 i wariancji 1. Zmienne $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N=n) = \frac{\Gamma(2+n)}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.

Niech $S_N = \begin{cases} 0 & gdy\ N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & gdy\ N > 0 \end{cases}$ i $Z_N = \begin{cases} 0 & gdy\ N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} I_i X_i & gdy\ N > 0 \end{cases}$.

Wtedy współczynnik kowariancji $Cov(S_N, Z_N)$ jest równy

(A) $\frac{19}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{16}{9}$

(D) $\frac{19}{9}$

(E) $\frac{17}{18}$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ są warunkowo niezależne przy danym θ. Załóżmy, że rozkład a priori parametru θ jest rozkładem gamma o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{6}\beta^4\theta^3 \exp(-\beta\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \le 0 \end{cases}.$$

Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ wyznaczamy predyktor bayesowski $\hat{X}_{n+1}$ zmiennej X_{n+1} przy kwadratowej funkcji straty.
Wariancja otrzymanego predyktora jest równa

(A) $\dfrac{\beta^2 n}{18(n+3)}$

(B) $\dfrac{\beta^2 n}{6(n+3)^2}$

(C) $\dfrac{\beta^2 n^2}{18(n+3)^2}$

(D) $\dfrac{\beta^2 n}{12(n+4)^2}$

(E) $\dfrac{\beta^2 n}{48(n+4)}$

Zadanie 8

Niech $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ale dodatkowo znamy średnią $\overline{X}_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$.

Budujemy estymator parametru σ^2 postaci $S^2 = a\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{2n}\right)^2$,

gdzie stała a dobrana jest tak, by statystyka $S^2 = a\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{2n}\right)^2$ była nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.

Interesuje nas względny błąd estymacji

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Wartość oczekiwana $E(R^2)$ jest równa

(A) $\frac{2(2n-1)}{n^2}$

(B) $\frac{2(4n-3)}{n^2}$

(C) $\frac{2}{2n-1}$

(D) $\frac{2(4n-3)}{(2n-1)^2}$

(E) $\frac{4n-3}{2(2n-1)^2}$

Zadanie 9

Niech $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna Y_i, $i = 1,2,\ldots,n$, ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(bx_i, 1)$, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są znanymi liczbami, a b jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4$.

Niech $\hat{b}$ będzie estymatorem największej wiarogodności parametru b, a $\hat{g} = \exp(2\hat{b})$ estymatorem funkcji $g(b) = \exp(2b)$.

Wtedy obciążenie estymatora $\hat{g}$

$$E_b\hat{g} - g(b)$$

jest równe

(A) 0

(B) $e^{2b}(\sqrt{e} - 1)$

(C) $e^{2b}(e^2 - 1)$

(D) $e^{2b}(e^4 - 1)$

(E) $e^{2b}(e - 1)$

Zadanie 10

Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły „jedynki”. W trzeciej rundzie rzucamy tymi kostkami, na których do tej pory nie wypadły „jedynki”.
Oblicz prawdopodobieństwo, że po co najwyżej trzech rundach na wszystkich kostkach będą „jedynki” (wybierz najbliższą wartość).

(A) 0,021

(B) 0,050

(C) 0,026

(D) 0,017

(E) 0,075

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	B	
5	E	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.