Zadanie 1

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,3,4,5$, gdzie b jest nieznanym parametrem rzeczywistym, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznanej wariancji $\sigma^2 > 0$.
Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie $\hat{b}$ i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej wiarogodności parametrów b i σ, a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

A) 4,108

(B) 0,919

(C) 1,792

(D) 2,054

(E) 1,591

Zadanie 2

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1.
Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - 2Y$.
Wtedy prawdopodobieństwo $P(U \in (0,5) \wedge V \in (0,5))$ jest równe

(A) $\frac{1}{3} - 2e^{-2,5} + \frac{5}{3}e^{-3}$

(B) $\frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2} + \frac{5}{3}e^{-3}$

(C) $1 - e^{-2,5} + e^{-3}$

(D) $1 - 2e^{-3} + e^{-6}$

(E) $\frac{1}{3} - e^{-2} + e^{-3}$

Zadanie 3

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką $X_1,...,X_n$ z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ i znanej wariancji równej 9. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1 : \mu = 2$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n.

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim_{n\to\infty} \beta_n n = 1$

(B) $\lim_{n\to\infty} \beta_n \sqrt{2\pi n} = 1$

(C) $\lim_{n\to\infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right)\sqrt{2\pi} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right)\frac{2\sqrt{2\pi n}}{3} = 1$

(E) $\lim_{n\to\infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right)\frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{2\pi}} = 1$

Zadanie 4

Na podstawie próby losowej $X_1,...,X_n$, gdzie X_i, $i=1,\ldots,n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,\theta)$ i $\theta>0$ jest nieznanym parametrem, zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1-\alpha$ postaci

$[T_X, aT_X]$,

gdzie T_X jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ na podstawie próby $X_1,...,X_n$.

Następnie uzyskano niezależnie drugą próbę losową $Y_1,...,Y_m$ z tego samego rozkładu i zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1-\alpha$ postaci

$[T_{XY}, bT_{XY}]$,

gdzie T_{XY} jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ na podstawie próby $X_1,...,X_n,Y_1,\ldots,Y_m$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak utworzone przedziały będą rozłączne.

(A) 0

(B) $\dfrac{m\alpha}{m+n}$

(C) $\dfrac{n\alpha}{m+n}$

(D) $\alpha\left(1-\dfrac{m\alpha}{m+n}\alpha^{m/n}\right)$

(E) $\alpha\left(1-\dfrac{n\alpha}{m+n}\alpha^{m/n}\right)$

Zadanie 5

Niech $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto o gęstości

$$p_{\lambda,\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\theta \theta}{(x+\lambda)^{\theta+1}} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 1,\ \lambda > 0$ są ustalonymi liczbami. Niech N będzie zmienną losową niezależną od $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$, o rozkładzie geometrycznym

$$P(N = n) = (1-q)q^{n-1} \qquad \text{gdy } n = 1,2,3,\ldots,$$

gdzie $q \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą.

Wyznaczyć $E(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N \mid \min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_N) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczbą większą od 0.

(A) $\dfrac{t}{1-q} + \dfrac{\lambda + t}{\theta - 1}$

(B) $t + \dfrac{q(\lambda + t)}{(1-q)(\theta - 1)}$

(C) $\dfrac{\lambda q + \theta t - (1-q)t}{(\theta - 1)(1-q)}$

(D) $\dfrac{\lambda + \theta t}{(\theta - 1)(1-q)}$

(E) $\dfrac{\lambda q + (\theta - 1)t}{(\theta - 1)(1-q)}$.

Zadanie 6

Niech X będzie zmienną losową o funkcji gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta - |x|}{\theta^2} & \text{gdy } |x| < \theta \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie pojedynczej obserwacji weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ testem opartym na ilorazie wiarogodności na poziomie istotności 0,1.
Moc testu przy alternatywie $\theta = 2$ jest równa

(A) 0,352

(B) 0,280

(C) 0,291

(D) 0,325

(E) 0,303

Zadanie 7

Rozważamy ciąg niezależnych dwuwymiarowych zmiennych losowych $(X_n, Y_n)_{n=1}^{+\infty}$, gdzie (X_n, Y_n) mają rozkłady jednostajne na zbiorze $[-2,2]\times[-2,2]$.
Niech

$$S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i \right) \quad \text{i} \quad |S_n| = \sqrt{S_{n,1}^2 + S_{n,2}^2}\,.$$

Stałą c dobrano tak, by

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|S_n| < c\sqrt{n}\right) = 0{,}95\,.$$

Stała c jest równa

(A) 2,063

(B) 2,826

(C) 1,413

(D) 5,992

(E) 3,842

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,\theta)$. Parametr $\theta > 0$ jest nieznany i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{\theta^5} & \text{gdy } \theta > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wyznaczamy predyktor bayesowski $\hat{X}_{n+1}$ zmiennej X_{n+1} w oparciu o próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$ przy kwadratowej funkcji straty. Wartość oczekiwana tego predyktora czyli wielkość $E(\hat{X}_{n+1} \mid \theta)$ jest równa

(A) $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{n+4}{2(n+3)n\theta^n}$

(B) $\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{n+4}{2(n+3)n\theta^n}$

(C) $\dfrac{(n+4)n\theta}{2(n+3)(n+1)} + \dfrac{n+4}{2(n+3)(n+1)\theta^n}$

(D) $\dfrac{(n+4)n\theta}{2(n+3)(n+1)}$

(E) $\dfrac{(n+4)\theta}{2(n+3)} + \dfrac{n+4}{2(n+3)(n+1)\theta^n}$

Zadanie 9

Rzucamy czterema symetrycznymi monetami. Następnie rzucamy ponownie tymi monetami, na których nie wypadły „orły". W trzeciej rundzie rzucamy tymi monetami, na których do tej pory nie wypadły „orły".
Oblicz prawdopodobieństwo, że po trzech rundach na wszystkich monetach będą „orły" (wybierz najbliższą wartość).

(A) 0,500

(B) 0,234

(C) 0,456

(D) 0,117

(E) 0,586

Zadanie 10

Niech A i C będą zdarzeniami niezależnymi oraz $P(A)=\frac{1}{3}$ i $P(A\cup C)=\frac{7}{9}$. Niech $P(B|A)=P(B|C)=P(B|A\cap C)=\frac{1}{2}$ i $P(B'|A'\cap C')=\frac{3}{4}$.

Wtedy $P(A|B)$ jest równe

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\frac{3}{8}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	D	
4	B	
5	C	
6	D	
7	B	
8	C	
9	E	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.