Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

WERSJA TESTU: A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{dla } (x,y)\in(0,1)^2 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(X,\min(X,Y))$ wynosi:

(A) $\frac{5}{24}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{24}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{1}{4}$

Zadanie 2.

Ubezpieczyciel zawarł kontrakt z $n \geq 1$ klientami na stały czas $T > 0$. Odpowiedzialność ubezpieczyciela kończy się z momentem zajścia szkody (po zajściu szkody wypłacane jest należne odszkodowanie). Załóżmy, że czasy do powstania szkody są niezależne dla wszystkich klientów i mają rozkład wykładniczy o średniej $\frac{1}{\theta} > 0$. Okazało się, że w trakcie czasu T wypłacono ubezpieczenie $0 < k \leq n$ klientom w chwilach $x_1, x_2, \ldots, x_k$ od zawarcia umowy (tzn. $n-k$ klientów nie spowodowało szkody w ciągu czasu T od zawarcia umowy).
Estymator największej wiarogodności dla parametru θ wynosi:

(A) $\dfrac{k+(n-k)}{T}\sum_{i=1}^{k} x_i$

(B) $\dfrac{k+(n-k)\sum_{i=1}^{k} x_i}{T}$

(C) $\dfrac{k}{(n-k)T}\sum_{i=1}^{k} x_i$

(D) $\dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} x_i + (n-k)T}$

(E) $\dfrac{k+(n-k)T}{\sum_{i=1}^{k} x_i}$

Zadanie 3.

Wybierzmy losowo dwa punkty p_1, p_2 na obwodzie okręgu o promieniu 2 (wybierając jednostajnie, wzajemnie niezależnie, dwa kąty $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$). Niech C będzie długością odcinka łączącego p_1 i p_2.
$Pr(C > 2\sqrt{3})$ wynosi:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$

Zadanie 4.

Niech $X_1,\ldots,X_n$ jest będzie próbką z rozkładu wykładniczego o średniej $1/\lambda > 0$. Obserwujemy próbkę $Y_1,\ldots,Y_n$, gdzie

$$Y_i = \left\lfloor \frac{X_i}{a} \right\rfloor,$$

$\lfloor x \rfloor$ jest częścią całkowitą z x (tzn. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$) oraz $a > 0$ jest znanym parametrem. Niech $\hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Przez $\lceil x \rceil$ oznaczamy tzw. *sufit* z liczby x tzn. $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$.

Estymator *największej wiarogodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ wyraża się wzorem:

(A) $\lceil a\hat{S} \rceil$

(B) $\ln \sqrt[a]{\hat{S}+1}$

(C) $\left\lfloor \frac{a}{\hat{S}} \right\rfloor$

(D) $\ln \left(\frac{1}{\hat{S}}\right)^a$

(E) $\ln \sqrt[a]{1+\frac{1}{\hat{S}}}$

Zadanie 5.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Niech $k \geq 2$, rozpatrzmy wektor losowy $(Z_1, \ldots, Z_n)$ o rozkładzie

$$Pr(Z_1 = x_1, \ldots, Z_n = x_n) = Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | X_1 + \ldots + X_n = k)$$

Korelacja $\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2)$ wynosi:

(A) $-\dfrac{1}{n-2}$

(B) $\dfrac{2}{n}$

(C) $-\dfrac{1}{n-1}$

(D) $-\dfrac{1}{2n-1}$

(E) $\dfrac{1}{n}$

Zadanie 6.

Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2y & \text{dla } (x,y)\in(0,2)\times(0,1)\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

Wówczas $E\left(2X-Y|X-Y=1\right)$ wynosi

(A) $\frac{62}{17}$

(B) $\frac{62}{85}$

(C) $\frac{147}{85}$

(D) $\frac{232}{85}$

(E) $\frac{45}{17}$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie o ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuancie F. Niech $X_{1:10}, \ldots, X_{10:10}$ oznaczają odpowiednie statystyki pozycyjne.
Niech m_X oznacza medianę zmiennej losowej o rozkładzie F_X.
$Pr(X_{3:10} \leq m_X \leq X_{8:10})$ wynosi

(A) $\frac{1022}{1024}$

(B) $\frac{672}{1024}$

(C) $\frac{500}{1024}$

(D) $\frac{1002}{1024}$

(E) $\frac{912}{1024}$

Zadanie 8.

Załóżmy, że $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$. Niech

$$N = \min\left\{ n \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} U_i > \frac{1}{2} \right\}.$$

Wartość oczekiwana EN wynosi:

(A) e^2

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{1}{2}e + 1$

(D) $\sqrt{e}$

(E) e

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 2$ są niezależne o jednakowym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\lambda > 0$. Obserwujemy zmienną losową Z i rozpatrujemy hipotezy:

H_0: Z ma taki sam rozkład jak $-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

H_1: Z ma taki sam rozkład jak $-\sum_{i=1}^{n-1} \ln X_i$

Moc t najmocniejszego testu na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$ spełnia równanie:

(A) $e^{-\frac{n-1}{\lambda t}} = \alpha$

(B) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} e^{-\frac{n-1}{\lambda t}} \left(\frac{n-1}{\lambda t}\right)^k = \alpha$

(C) $1 - e^{-\frac{n-1}{\lambda t}} = \alpha$

(D) $1 - e^{-\frac{n-1}{t}} = \alpha$

(E) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} e^{-\frac{n-1}{t}} \left(\frac{n-1}{t}\right)^k = 1 - \alpha$

Zadanie 10.

Niech $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$ będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\mathbb{E} = \{1, 2\}$ z następującą macierzą przejść:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Wiadomo, że $Pr(X_{10} = 1) = \frac{1025}{4096}$. Ile wynosi $Pr(X_0 = 1)$?

(A) $\frac{3}{16}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3071}{4096}$

(D) $\frac{1}{2^{10}}$

(E) 1

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 20 listopada 2017r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	D	
4	E	
5	C	
6	D	
7	E	
8	D	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.