

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXVII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 21 listopada 2017 r.**

**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 120 minut**

**Zadanie 1.**

Zakład ubezpieczeń nabył 5-letnią obligację rządową w dniu jej emisji po cenie równej wartości nominalnej, która wynosi 100.000 zł. Obligacja jest tak skonstruowana, że kupony są płatne w okresach rocznych. Oprocentowanie obligacji jest stałe i wynosi 3% p.a. Stopa dyskontowa także wynosi 3%. Na rynku pojawiają się informacje, że rynkowe stopy procentowe mogą w najbliższym czasie obniżyć się o 50 pb. Proszę obliczyć *duration* oraz odpowiedzieć na pytanie jak może zmienić się cena obligacji w przypadku spadku stóp procentowych. Dodatkowo proszę omówić zależności zachodzące pomiędzy nominalną stopą dochodu (stopą oprocentowania), bieżącą stopą dochodu a stopą dochodu w okresie do wykupu (*YTM*) w przypadku obligacji o stałym oprocentowaniu.

**Rozwiązanie:**

W tabeli poniżej zawarto niezbędne wyliczenia.

Wyszczególnienie	Okres (t)					Łącznie:
	1	2	3	4	5	
CF	5 000	5 000	5 000	5 000	105 000	<b>125 000</b>
Stopa dyskontowa	3,00%	3,00%	3,00%	3,00%	3,00%	-
PV	4 761,90	4 535,15	4 319,19	4 113,51	82 270,25	<b>100 000,00</b>
PV * t	4 761,90	9 070,29	12 957,56	16 454,05	411 351,24	<b>454 595,05</b>

D = 4,546 roku

$$\frac{\Delta PV}{PV} = -4,72 \cdot \frac{-0,5\%}{(1+3\%)} = 2,29\%$$

Przy prognozowanej zmianie stóp procentowych na poziomie -50 pb zmiana wartości obligacji wyniosłaby +2,29%, co kwotowo daje wzrost wartości o 2.289,85 zł.

Zależności zachodzące pomiędzy nominalną stopą dochodu, bieżącą stopą dochodu a stopą dochodu w okresie do wykupu (*YTM*) w przypadku obligacji o stałym oprocentowaniu:

- w przypadku obligacji z premią *YTM* jest mniejsza od bieżącej stopy dochodu, która z kolei jest mniejsza od stopy oprocentowania obligacji,
- w przypadku obligacji z dyskontem *YTM* jest większa od bieżącej stopy dochodu, która z kolei jest większa od stopy oprocentowania obligacji,
- w przypadku obligacji sprzedawanej po wartości nominalnej wszystkie trzy wymienione stopy są równe.

**Zadanie 2.**

Proszę wymienić i opisać podstawowe postulaty trzech teorii opisujących strukturę czasową stóp procentowych. Dla każdej z wymienionych teorii narysuj przykładową krzywą stopy dochodu. Odpowiedz na pytanie: Dlaczego potrzebne jest estymowanie struktury terminowej stóp procentowych?

**Rozwiązanie:**

**Teoria oczekiwań** – zakłada, że długoterminowe stopy procentowe są średnią geometryczną oczekiwanych przyszłych krótkoterminowych stóp procentowych. Wzór na terminową stopę dochodu dla obligacji  $n$ -letniej za  $t$ -lat przybiera postać:

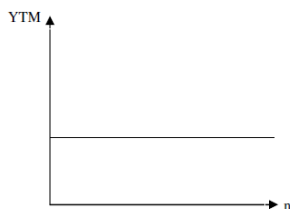
$$F_{t,n} = \sqrt[n]{\frac{(1 + YTM_{t+n})^{t+n}}{(1 + YTM_t)^t} - 1}$$

gdzie:

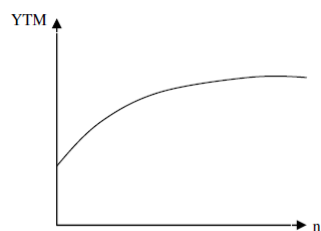
$F_{t,n}$  – terminowa stopa dochodu dla obligacji  $n$ -letniej za  $t$  – lat

$YTM_n$  – stopa dochodu dla obligacji  $n$ -letniej do okresu wykupu

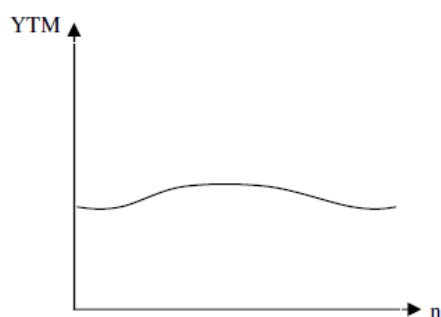
Teoria oczekiwań implikuje płaską krzywą stopy dochodu.



**Teoria preferencji płynności** – według tej teorii inwestorzy oczekują premii za ryzyko przy inwestycji w obligacje długoterminowe. Według inwestorów inwestycja długoterminowa wiąże się z wyższym poziomem ryzyka niż krótkoterminowa. Teoria ta wyznacza rosnącą krzywą stopy dochodu.



**Teoria segmentacji rynku** – inwestorzy preferują obligacje o określonym terminie wykupu, a stopy dochodu w poszczególnych segmentach rynku nie zależą od siebie. Na przykład fundusze emerytalne preferują obligacje długoterminowe ze względu na charakter swoich aktywów (stabilna struktura długoterminowych aktywów). Banki natomiast mogą preferować obligacje krótkoterminowe ze względu na duży udział depozytów krótkoterminowych. Według tej teorii można wyznaczyć następujący kształt krzywej stopy dochodu:



Estymowanie struktury terminowej stóp procentowych jest potrzebne z co najmniej dwóch powodów:

1. wyeliminowanie wpływu tzw. „szumu” (zakłóceń losowych  $\epsilon$ ),
2. założenie znajomości ciągłej struktury terminowej w modelach (głównie do obliczeń określonych miar ryzyka, prognozowania zmienności cen obligacji lub stóp procentowych, czy do wyceny instrumentów finansowych, w tym pochodnych).

**Zadanie 3.**

Doradca inwestycyjny w wybranym towarzystwie ubezpieczeń na życie analizuje ryzyko kredytowe związane z brakiem możliwości spłaty obligacji korporacyjnych. W ramach przeprowadzanej analizy chce obliczyć prawdopodobieństwo braku spłaty dwóch obligacji korporacyjnych A i B jednocześnie. Doradca posiada dane dotyczące prawdopodobieństw niewypłacalności emitentów obligacji w kolejnym roku (dla obligacji A równe 0,06; dla obligacji B równe 0,10) zastanawia się jednak jak policzyć łączne prawdopodobieństwo wynikające z wzajemnych zależności pomiędzy danymi obligacjami. W tym celu chce wykorzystać kopulę. Mając informację o prawdopodobieństwie niewypłacalności oraz następujące generatory kopuli:

$$\text{Generator kopuli Gumbela: } G_{\alpha} \Psi_{\alpha}(F(x)) = [-\ln(F(x))]^{\alpha}$$

$$\text{Generator kopuli Claytona: } C_{\alpha} \Psi_{\alpha}(F(x)) = 1/\alpha \cdot [(F(x))^{-\alpha} - 1]$$

zwrócił się do aktuarium towarzystwa o pomoc w celu określenia wspomnianego prawdopodobieństwa i uzasadnienie, który z podanych generatorów byłby bardziej adekwatny. Jako aktuarium oblicz łączne prawdopodobieństwo niewypłacalności przy założeniu, że parametr  $\alpha$  jest równy 2. Jednocześnie wyjaśnij, który z podanych generatorów będzie bardziej odpowiedni do zastosowania w rozważanym problemie.

**Rozwiązanie:**

	Obligacja	
	A	0,06
	B	0,1
	$\alpha$	2

**Gumbela:**

obligacja A 7,91528

Obligacja B 5,301898

Sumując te dwa wyniki i stosując funkcje pseudo-odwrotną

3,6355437

**prawdopodobieństwo łączne****0,02637**

wartość funkcji w punkcie 0 wynosi  $\infty$ , czyli otrzymaliśmy generator ściśły. W takim przypadku funkcja pseudo-odwrotna jest równa funkcji odwrotnej dla każdego  $t$ . Wyznamy więc funkcję odwrotną do funkcji  $\varphi$

$$\begin{aligned}\varphi_{\theta}(t) &= (-\ln t)^{\theta} \\ -\varphi_{\theta}(t)^{\frac{1}{\theta}} &= \ln t \\ t &= e^{-\varphi_{\theta}(t)^{\frac{1}{\theta}}}\end{aligned}$$

Wyznamyliśmy funkcję odwrotną postaci  $\varphi_{\theta}^{-1}(t) = e^{-t^{\frac{1}{\theta}}}$  i możemy wstawić ją do wzoru na kopulę (1.17). Zatem

$$\begin{aligned}C_{\theta}^{G_u}(u, v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{-1}((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}) \\ &= \exp\{-((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\}.\end{aligned}$$

**Claytona**

obligacja A 138,3889

obligacja B 49,50

Sumując te dwa wyniki i stosując funkcje pseudo-odwrotną

**prawdopodobieństwo łączne: 0,0515178**

Wyznaczmy teraz funkcję odwrotną dla generatora

$$\begin{aligned}\varphi_{\theta}(t) &= \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta} \\ \theta \cdot \varphi_{\theta}(t) + 1 &= t^{-\theta} = \frac{1}{t^{\theta}} \\ (\theta \cdot \varphi_{\theta}(t) + 1)^{\frac{1}{\theta}} &= \frac{1}{t} \\ t &= (\theta \cdot \varphi_{\theta}(t) + 1)^{-\frac{1}{\theta}}.\end{aligned}$$

Zatem funkcja pseudo-odwrotna jest postaci

$$\varphi^{[-1]}(t) = \max\{(\theta t + 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\}.$$

Podstawimy teraz otrzymaną funkcję do wzoru na kopulę (1.17)

$$\begin{aligned}C_{\theta}^{Cl}(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{[-1]}\left(\frac{u^{-\theta} - 1}{\theta} + \frac{v^{-\theta} - 1}{\theta}\right) \\ &= \varphi^{[-1]}\left(\frac{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 2}{\theta}\right) \\ &= \max\left\{\left(\theta \cdot \frac{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 2}{\theta} + 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\right\} \\ &= \max\{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\}.\end{aligned}$$

**Zadanie 4.**

Towarzystwo ubezpieczeń XY S.A. ocenia zależność pomiędzy wartością szkód zaistniałych w dwóch klasach ubezpieczenia: Klasa A i Klasa B. Historyczne wartości szkód dla danych klas ubezpieczeń są następujące:

**Tablica 4.1** Historyczne wartości szkód zaistniałych w dwóch klasach ubezpieczenia dla towarzystwa XY S.A. (w tys. zł.).

<b>Rok</b>	<b>Klasa A</b>	<b>Klasa B</b>
<b>2012</b>	165	770
<b>2013</b>	150	463
<b>2014</b>	127	427
<b>2015</b>	214	686
<b>2016</b>	207	505
<b>Razem</b>	<b>863</b>	<b>2 851</b>
<b>Średnia arytmetyczna</b>	172,6	570,2

Źródło: materiały wewnętrzne Towarzystwa XY S.A.

- 4.a) Na podstawie danych dotyczących wartości szkód (tablica 4.1) oblicz współczynnik korelacji *rho* Pearsona ( $r$ ) oraz *tau* Kendalla ( $\tau$ ),
- 4.b) Opisz znaczenie i zinterpretuj wynik dla obu współczynników. Na podstawie otrzymanego wyniku zasugeruj, z jakimi rodzajami klas ubezpieczeń możemy mieć do czynienia. Odpowiedz na pytanie: czy ewentualnie poziom szkód w danych klasach może być determinowany „wspólnym” ryzykiem, czy mogą istnieć inne czynniki mające wpływ na poziom szkód w poszczególnych klasach oddzielnie (niezależnie).

**Rozwiązanie:**

Rozwiązanie do punktu 4.a)

*Współczynnik Pearsona ( $r$ )*

Rok	Klasa A	Klasa B	A- $\mu$ A	B- $\mu$ B	(A- $\mu$ A) <sup>2</sup>	(B- $\mu$ B) <sup>2</sup>	(A- $\mu$ A)*(B- $\mu$ B)
2012	165	770	-7,6	199,8	57,8	39 920,0	-1518,48
2013	150	463	-22,6	-107,2	510,8	11 491,8	2422,72
2014	127	427	-45,6	-143,2	2 079,4	20 506,2	6529,92
2015	214	686	41,4	115,8	1 714,0	13 409,6	4794,12
2016	207	505	34,4	-65,2	1 183,4	4 251,0	-2242,88
<b>Razem</b>	<b>863</b>	<b>2 851</b>			<b>5 545,2</b>	<b>89 578,8</b>	<b>9 985,4</b>
Średnia arytmetyczna	172,6	570,2					

T-1	4
S <sub>A</sub>	37,2
S <sub>B</sub>	149,6
Cov S <sub>AB</sub>	2496,35
<b><math>\rho</math></b>	<b>0,45</b>

*Współczynnik Kendalla ( $\tau$ )*

Rok	Klasa A	Klasa B	v2012	v2013	v2014	v2015
2012	165	770				
2013	150	463	m			
2014	127	427	m	m		
2015	214	686	z	m	m	
2016	207	505	z	m	m	m

<b>T</b>	5
<b><math>\rho_m</math></b>	8
<b><math>\rho_z</math></b>	2
<b><math>\tau_{A,B}</math></b>	<b>0,60</b>



---

Rozwiązanie do punktu 4.b)

Obie metody są relatywnie proste w kalkulacji. Jednakże współczynnik Pearsona zależy od rozkładu szkód i powinien być stosowany, w sytuacji kiedy rozkład szkód ma charakter rozkładu eliptycznego (np. rozkład normalny, T-Studenta, Laplace). W pozostałych przypadkach wynik może okazać się nie ważny.

Współczynnik Kendalla zależy jedynie od nadanych rang i niezależnie od rodzaju rozkładu szkód wynik zawsze jest ważny.

Policzone współczynniki mają wartość pozytywną, co sugeruje, że wartości szkód poruszają się w tym samym kierunku (są zależne) i mogą wynikać ze realizacji określonego ryzyka niejako wspólnie. Ryzyka powodujące szkody z klasy A i B są ze sobą skorelowane. Jednak wartości współczynników są niższe od 1, co może świadczyć także o tym, że na wartości szkód w podanych klasach ma wpływ jeszcze inny rodzaj ryzyka (ryzyko oddziałujące oddzielnie na wartość szkód w klasie A i klasie B). Przykładem klasy szkód może być ubezpieczenie od powodzi i ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych. W obu przypadkach wartość zgłaszanych szkód uzależniona jest od warunków pogodowych, ale oddziałują także inne czynniki niezależnie.

**Zadanie 5.**

Towarzystwo reasekuracji RE5 zdecydowało, że rozpocznie działania zmierzające do ubezpieczenia ryzyka operacyjnego innych zakładów ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych. Jako pracownik tego Towarzystwa krótko zdefiniuj ryzyko operacyjne. Kilku z obecnych klientów towarzystwa RE5 zawnioskowało o stworzenie takiej oferty. Każdy z nich przesłał to RE5 dane dotyczące poziomu szkód wynikających z realizacji ryzyka operacyjnego z ostatnich kilku lat, tak żeby RE5 ustaliło poziom składki rocznej za proponowane ubezpieczenie. Szeregi czasowe rocznych wartości szkód związanych z danym ryzykiem dla wszystkich zakładów, które zgłosiły swoje zainteresowanie mają następujące parametry statystyczne:

**Tablica 5.1** Parametry statystyczne szeregów czasowych szkód wynikających z ryzyka operacyjnego klientów RE5 (dane w zł).

Klient RE5	Średnia arytmetyczna	Wariancja
TU T1 S.A.	20 000,00	250 000 000,00
TU T2 S.A.	20 000,00	150 000 000,00
TU T3 S.A.	10 000,00	40 000 000,00
TU T4 S.A.	40 000,00	600 000 000,00

W związku z brakiem doświadczenia z ubezpieczeniem przedmiotowego ryzyka i z jego wyceną, w celu skalkulowania składki rocznej za takie ubezpieczenie zaproponowano dwa podejścia:

**Podejście I** – polegające na policzeniu składki z uwzględnieniem średniej wartości szkód z narzutem w wysokości 50%, w związku z kosztami Towarzystwa reasekuracji RE5 i zakładanym poziomem zysku.

**Podejście II** – zakłada następujące kroki:

- dopasowanie rozkładu gamma za pomocą momentów (przy zastosowanej parametryzacji rozkładu gamma:  $E(X) = a/\lambda$ ,  $V(X) = a/\lambda^2$ ) do całkowitych szkód z tytułu ryzyka operacyjnego, zaraportowanych przez klientów RE5,
- wyliczenie wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym przy pomocy VaR z założonym poziomem ufności równym 99,5%,
- wyznaczenie składek jako wartość oczekiwanej szkód zaraportowanych, powiększonych o koszt kapitału oraz powiększonych o 25% narzutu na pokrycie kosztów i zapewnienie zakładanego poziomu zysku. Koszt kapitału został określony jako 5% wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym.

Jako aktuariusz Towarzystwa reasekuracji RE5 oblicz poziom składek w obu podejściach dla każdego z klientów RE5 wykorzystując parametry statystyczne podane w tablicy 5.1 oraz wartości strat z rozkładu gamma (tablica 5.2) dla 0,995 kwantyla.

**Tablica 5.2.** Kwantyle rzędu 0,995 dla rozkładu gamma dla danych parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$

<b>Lambda (<math>\lambda</math>)</b>	0,00007	0,00008	0,00013	0,00025
<b>Alpha (<math>\alpha</math>)</b>				
1,60	99 422	82 852	49 711	26 513
2,50	125 622	104 685	62 811	33 499
2,67	130 183	108 485	65 091	34 715

Jaki byłby wymóg kapitałowy dla RE5, gdyby wszyscy klienci zdecydowali się na zawarcie umowy reasekuracyjnej przy danym poziomie składek oraz przy założeniu, że ryzyka operacyjne poszczególnych klientów są od siebie niezależne.

**Rozwiązanie:**

Ryzyko operacyjne oznacza ryzyko straty wynikające z niewłaściwych lub błędnych procesów wewnętrznych, z działań personelu lub systemów oraz ze zdarzeń zewnętrznych.

**Podejście I:**

Kalkulacja składek - składki obliczone zostały w prosty sposób poprzez przemnożenie średniej wartości szkód wynikających z realizacji ryzyka operacyjnego zareportowanych przez klientów RE5 przez 150%.

Klient RE5	Średnia arytmetyczna	Poziom składek reasekuracyjnych
TU T1 S.A.	20 000,00	<b>30 000,00</b>
TU T2 S.A.	20 000,00	<b>30 000,00</b>
TU T3 S.A.	10 000,00	<b>15 000,00</b>
TU T4 S.A.	40 000,00	<b>60 000,00</b>

**Podejście II:**

- a) Stosując metodę momentów możemy zapisać, że parametry rozkładu gamma (parametry: *alpha* i *lambda*) są równe:

$$E(X) = \alpha / \lambda$$

$$V(X) = \alpha / \lambda^2$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\lambda = E(X) / V(X)$$

$$\alpha = E(X)^2 / V(X)$$

Wykorzystując dane parametry statystyczne możemy wyliczyć wartość parametrów rozkładu gamma:

Klient RE5	Alpha( $\alpha$ )	Lambda ( $\lambda$ )
TU T1 S.A.	1,600	0,00008
TU T2 S.A.	2,667	0,00013
TU T3 S.A.	2,500	0,00025
TU T4 S.A.	2,667	0,00007

- b) Na podstawie wartości 0,995 kwantyla z tablic rozkładu gamma dla obliczonych parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$  otrzymujemy wymóg kapitałowy dla poszczególnych klientów:

<b>Klient RE5</b>	<b>Wymóg kapitałowy</b>
TU T1 S.A.	82 852,00
TU T2 S.A.	65 091,00
TU T3 S.A.	33 499,00
TU T4 S.A.	130 183,00

- c) W celu wyznaczenia składek najpierw obliczamy koszt kapitału jako 5% wymogu kapitałowego

<b>Klient RE5</b>	<b>Koszt kapitału</b>
TU T1 S.A.	4 142,60
TU T2 S.A.	3 254,55
TU T3 S.A.	1 674,95
TU T4 S.A.	6 509,15

- Następnie wyliczamy poziom składek reasekuracyjnych dla każdego z klientów RE5 z uwzględnieniem 25% narzutu:

<b>Klient RE5</b>	<b>Składka reasekuracyjna</b>
TU T1 S.A.	30 178,25
TU T2 S.A.	29 068,19
TU T3 S.A.	14 593,69
TU T4 S.A.	58 136,44

**Wymóg kapitałowy w przypadku ubezpieczenia wszystkich klientów przez RE5 wynosi: 170 795,46**

**Zadanie 6.**

Zakład ubezpieczeń X do wyznacza wartości rezerwy IBNR, w przypadku ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych stosuje proste techniki *chain ladder (CL)*. Na koniec czwartego roku rozwoju portfela szkód dany jest następujący trójkąt szkód (*run off triangle*):

**Tablica 6.1.** Trójkąt szkód nieskumulowanych (w mln. zł.).

Lata zajścia szkody (i)	Lata rozwoju szkody (j)			
	0	1	2	3
0 (2014)	351	80	30	8
1 (2015)	395	91	35	
2 (2016)	380	115		
3 (2017)	430			

Na podstawie danych zawartych w tablicy 6.1 oszacuj wielkość rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia na koniec analizowanego okresu wykorzystując prostą technikę *chain ladder (CL)*.

**Rozwiązanie:**

## 1. Kumulujemy szkody

dane w mln zł.

Lata zajścia szkody (i)	Lata rozwoju szkody (j)			
	0	1	2	3
0 (2014)	351	431	461	469
1 (2015)	395	486	521	
2 (2016)	380	495		
3 (2017)	430			

## 2. Liczymy współczynniki przejścia

W <sub>1</sub>	125,40%
W <sub>2</sub>	107,09%
W <sub>3</sub>	101,74%

## 3. Uzupełniamy trójkąt

Lata zajścia szkody (i)	Lata rozwoju szkody (j)			
	0	1	2	3
0 (2014)	351	431	461	469
1 (2015)	395	486	521	<b>530</b>
2 (2016)	380	495	<b>530</b>	<b>539</b>
3 (2017)	430	<b>539</b>	<b>577</b>	<b>587</b>

**Wartość rezerwy IBNR na koniec 2017 r wynosi:****211 mln zł.**

**Zadanie 7.**

Towarzystwo reasekuracji RE7 S.A. ocenia swój niezbędny kapitał ekonomiczny za pomocą metody VaR skalibrowanej na poziomie ufności ( $\alpha$ ) równym 95% rocznych strat.

Podczas pierwszego roku działalności Towarzystwo to zawarło pięć kontraktów reasekuracyjnych nadwyżki szkody (*excess of loss treaties*). Kontrakty te charakteryzują się następującym prawdopodobieństwem nie wystąpienia szkód poniżej ustalonego limitu.

**Tablica 7.1** Charakterystyka kontraktów reasekuracyjnych.

	<b>Limit</b>	<b>Prawdopodobieństwo nie wystąpienia szkody poniżej limitu</b>
Towarzystwo ubezpieczeń X	60 mln zł.	0,995
Towarzystwo ubezpieczeń Y	60 mln zł	0,985
Towarzystwo ubezpieczeń Z	60 mln zł	0,975
Towarzystwo ubezpieczeń XY	60 mln zł	0,965
Towarzystwo ubezpieczeń XZ	60 mln zł	0,955

Dodatkowo założono, że szkody wynikające z umów reasekuracyjnych są ze sobą powiązane kopulą Gumbela z parametrem  $\alpha$  równym 2. Generator kopuli Gumbela ma postać taką jak w zadaniu 3, czyli  $G_{\alpha}\Psi_{\alpha}(F(x)) = [-\ln(F(x))]^{\alpha}$

Władze Towarzystwa uważają, że ponieważ prawdopodobieństwo nie wystąpienia szkód we wszystkich kontraktach ubezpieczeniowych jest wyższe niż 95%, to nie ma potrzeby posiadania dodatkowego kapitału ekonomicznego (narzutu kapitałowego).

Jako aktuariusz RE7, proszę zweryfikować twierdzenie władz Towarzystwa, dotyczące braku konieczności posiadania dodatkowego kapitału ekonomicznego. Czy rzeczywiście Towarzystwo nie powinno zgromadzić dodatkowego kapitału ekonomicznego nawet w sytuacji, gdy wspomniane prawdopodobieństwo jest wyższe od 95%?

**Rozwiązanie:**

Generator Gumbela dla każdego kontraktu	$1/\alpha$	0,5
	$\alpha$	2

	Limit	Prawdopodobieństwo nie wystąpienia szkody poniżej limitu	$G_{\alpha} \Psi_{\alpha}(F(x)) = [-\ln(F(x))]^{\alpha}$	Wartość
Towarzystwo ubezpieczeń X	60 mln zł.	0,995	$-\ln(0,995)^2$	0,000025
Towarzystwo ubezpieczeń Y	60 mln zł	0,995	$-\ln(0,995)^2$	0,000025
Towarzystwo ubezpieczeń Z	60 mln zł	0,975	$-\ln(0,975)^2$	0,000641
Towarzystwo ubezpieczeń XY	60 mln zł	0,975	$-\ln(0,975)^2$	0,000641
Towarzystwo ubezpieczeń XZ	60 mln zł	0,965	$-\ln(0,965)^2$	0,001269

0,002602

**Prawdopodobieństwo  
łącznie 95,0%**

Towarzystwo reasekuracji RE7 S.A. powinno posiadać kapitał ekonomiczny powyżej absolutnego minimalnego wymogu kapitałowego pomimo faktu, że prawdopodobieństwo nie wystąpienia szkód wynosi dokładnie 95%. Za dodatkowym narzutem kapitałowym przemawiają następujące fakty:

- rozwój portfela umów i związana z tym zmiana łącznego prawdopodobieństwa nie wystąpienia szkód (*spadek prawdopodobieństw powoduje wzrost prawdopodobieństwa wystąpienia szkód i wówczas oszacowana VaR nie będzie adekwatna*),
- ryzyko modelu oceny ryzyka – nie ma pewności, że przyjęty generator kopuli jest adekwatny,
- ryzyko kalibracji dotyczące parametru  $\alpha$ ,
- analiza stresów uwzględniająca różne wyniki kalibracji oraz inne modele może wykazać konieczność utrzymywania dodatkowego kapitału,
- przeprowadzona analiza nie uwzględnia pozostałych ryzyk, takich jak ryzyko operacyjne, czy ryzyko rynkowe.



**Zadanie 8.**

Osoba 34-letnia kupiła polisę bezterminową na życie ze świadczeniem 10.000,- zł, wypłacanym na koniec roku śmierci. Na początku każdego roku płaci składkę netto w wysokości  $P$ . Po 22 latach osoba ta przerywa płacenie składek i otrzymuje dwie propozycje równoważnych aktuarialnie rozwiązań:

1. propozycja zamiany polisy na polisę *bezskładkową* ze świadczeniem zredukowanym do 7.000,- zł;
2. propozycja polegająca na wypłacie rezerwy netto w formie dożywotniej renty w wysokości 400 zł, wypłacanej na początek każdego roku.

Na podstawie powyższych informacji wyznacz składkę netto  $P$ . Dodatkowo omów czynniki ryzyka związane z kalkulacją taryf aktuarialnych w ubezpieczeniach na życie.

**Rozwiązanie:**

Na początku należy zapisać równania wynikające z analiza każdej z propozycji.

Analiza pierwszej propozycji prowadzi do następującego równania:

$$0,7 = \frac{{}_{22}V_{34}}{A_{56}} = 1 - \frac{P_{34}}{P_{56}}$$

Analiza drugiej propozycji do następującego równania:

$$\frac{{}_{22}V_{34}}{\ddot{a}_{56}} = 0,04$$

Korzystając z własności, że:

$$\frac{{}_{22}V_{34}}{\ddot{a}_{56}} = \frac{{}_{22}V_{34}}{A_{56}} * \frac{A_{56}}{\ddot{a}_{56}} = \left(1 - \frac{P_{34}}{P_{56}}\right) * P_{56} = P_{56} - P_{34}$$

W efekcie otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 0,04 = P_{56} - P_{34} \\ 0,7 = 1 - \frac{P_{34}}{P_{56}} \end{cases}$$

Powyższy układ równań należy rozwiązać względem  $P_{34}$ ; otrzymujemy  $P_{34}=0,017143$ .

Po przemnożeniu przez sumę ubezpieczenia poziom rocznej składki netto  $P$  wynosi **171,43 zł**. Czynniki ryzyka to: zmiana poziomu umieralności, trendy, oraz zmienność współczynników umieralności.

---

**Zadanie 9.**

Wymień i dokonaj krótkiej charakterystyki ryzyk wchodzących w skład podstawowych modułów ryzyka wykorzystywanych do obliczenia podstawowego wymogu kapitałowego według formuły standardowej. Dokonaj także opisu podstawowych trzech filarów systemu Solvency II.

---

**Rozwiązanie:****Filar I - Wymogi ilościowe**

-określenie wartości aktywów, pasywów, kapitału i wymogów kapitałowych SCR i MCR

**Filar II - Wymogi jakościowe**

Działania Zarządcze – polegają na dokonaniu jakościowego przeglądu procesów zarządzania

**Filar III – Raportowanie**

dotyczy sprawozdawczości nadzorczej oraz upublicznienia przez ZU informacji o finansowym lub innym charakterze ryzyk

- I. Moduł ryzyka aktuarialnego w pozostałych ubezpieczeniach osobowych i ubezpieczeniach majątkowych – moduł ten odzwierciedla ryzyko wynikające ze zobowiązań o charakterze zobowiązań wynikających z tytułu zawartych umów ubezpieczenia i reasekuracji. Moduł ten składa się co najmniej z następujących podmodułów:
- a) Ryzyko składki i rezerw w pozostałych ubezpieczeniach osobowych lub ubezpieczeniach majątkowych – ryzyko straty lub niekorzystnej zmiany wartości zobowiązań z tytułu zawartych umów ubezpieczenia wynikające ze zmienności w zakresie występowania, częstotliwości i dotkliwości zdarzeń losowych objętych ochroną ubezpieczeniową lub umowami reasekuracji oraz ze zmienności w zakresie terminu i wysokości wypłat odszkodowań i innych świadczeń,
  - b) Ryzyko katastroficzne – ryzyko straty lub niekorzystnej zmiany wartości zobowiązań wynikające ze znaczącej niepewności założeń dotyczących ustalania wysokości składek oraz tworzenia i ustalania rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności, związanych z ekstremalnymi lub wyjątkowym zdarzeniem losowym.
- II. Moduł ryzyka aktuarialnego w ubezpieczeniach na życie. Moduł ten składa się z następujących ryzyk:

- 
- a) ryzyko śmiertelności,
  - b) ryzyko długowieczności,
  - c) ryzyko niezdolności do pracy i zachorowalności,
  - d) ryzyka kosztów w ubezpieczeniach na życie,
  - e) ryzyko rewizji wysokości rent,
  - f) ryzyko rezygnacji z umów ubezpieczenia,
  - g) ryzyko katastroficzne w ubezpieczeniach na życie.
- III. Moduł ryzyka aktuarialnego w ubezpieczeniach zdrowotnych w ramach, którego wymieniamy:
- a) ryzyko składki i rezerw w ubezpieczeniach zdrowotnych o charakterze pozostałych ubezpieczeń osobowych oraz ubezpieczeń majątkowych,
  - b) ryzyko kosztów w ubezpieczeniach zdrowotnych
  - c) ryzyko pandemii.
- IV. Moduł ryzyka rynkowego w ramach, którego wyróżnia się:
- a) ryzyko stopy procentowej
  - b) ryzyko cen akcji\ryzyko cen nieruchomości
  - c) ryzyko spreadu kredytowego
  - d) ryzyko walutowe
  - e) ryzyko koncentracji aktywów.
- V. Moduł ryzyka kontrahenta - niewykonanie zobowiązań przez kontrahenta.

Opis poszczególnych rodzajów ryzyka powinien odpowiadać opisowi podanemu w Rozporządzeniu Ministra Finansów z dnia 23 grudnia 2015 r. w sprawie szczegółowego sposobu obliczania podstawowego kapitałowego wymogu wypłacalności według formuły standardowej.

---

**Zadanie 10.**

Wymień podstawowe cele funkcji aktuarialnej oraz obszary jakie, co najmniej powinien obejmować system zarządzania ryzykiem w zakładzie ubezpieczeń i reasekuracji.

---

**Rozwiązanie:**

Do podstawowych celów funkcji aktuarialnej w zakładzie ubezpieczeń i reasekuracji zaliczamy:

1. Koordynacja ustalania wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności;
2. Zapewnienie adekwatności metodyki stosowanych modeli, jak również założeń przyjętych do ustalania wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych;
3. Ocena, czy dane wykorzystane do ustalenia wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności są wystarczające i czy są odpowiedniej jakości;
4. Porównanie najlepszych oszacowań z danymi wynikającymi ze zgromadzonych doświadczeń,
5. Informowanie zarządu i rady nadzorczej zakładu ubezpieczeń i reasekuracji o wiarygodności i adekwatności ustalania wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności;
6. Nadzorowanie ustalania wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności w przypadkach stosowania przybliżeń, w tym podejścia indywidualnego;
7. Wyrażanie opinii na temat ogólnej polityki przyjmowania ryzyka do ubezpieczenia;
8. Wyrażanie opinii na temat adekwatności rozwiązań w zakresie reasekuracji;
9. Współpracowanie przy efektywnym wdrażaniu systemu zarządzania ryzykiem, w szczególności w następującym zakresie:
  - a) modelowania ryzyka stanowiącego podstawę obliczeń kapitałowego wymogu wypłacalności i minimalnego wymogu kapitałowego,
  - b) własnej oceny ryzyka i wypłacalności zakładu ubezpieczeń i zakładu reasekuracji;
10. Ustalanie wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów rachunkowości

System zarządzania ryzykiem obejmuje ryzyka, które należy uwzględnić w obliczeniach kapitałowego wymogu wypłacalności, oraz ryzyka, które są uwzględniane jedynie częściowo lub są w tych obliczeniach pomijane. System ten obejmuje co najmniej: ocenę ryzyka przyjmowanego do ubezpieczenia i tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych dla celów wypłacalności; zarządzanie aktywami i zobowiązaniami; lokaty, w szczególności w instrumenty pochodne; zarządzanie płynnością i ryzykiem koncentracji; zarządzanie ryzykiem operacyjnym; reasekurację i inne techniki przenoszenia ryzyka. Jednocześnie zakład ubezpieczeń i reasekuracji opracowuje plan płynności prognozujący wpływy pieniężne i wypływy pieniężne związane z aktywami i zobowiązaniami podlegającymi korekcie dopasowującej do odpowiedniej struktury stopy procentowej wolnej od ryzyka lub korekcie z tytułu zmienności do odpowiedniej struktury stopy procentowej wolnej od ryzyka.

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 21 listopada 2017r.**

**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń**

**Arkusz ocen**

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	