Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXII Egzamin dla Aktuariuszy z 28 września 2015 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Niech $N = \{1,2,3 \dots\}$. Rozważmy ciągi płatności $a = (a_n)_{n \in N}$ oraz $b = (b_n)_{n \in N}$ określone jak następuje:

a) dla ciągu a płatność w chwili n wynosi $a_n = 1$ dla każdego $n \in N$,

b) dla ciągu b płatność w chwili n wynosi $b_n = 2$ dla n parzystego, bądź $b_n = 0$ dla n nieparzystego.

Przyjmijmy, że do dyskontowania stosowany jest model dyskretny, a roczna stopa dyskontowa wynosi v, przy czym $0 < v < 1$. Niech D^a opisuje *duration (Macaulay duration)* ciągu płatności a , natomiast D^b – analogicznie rozumiane *duratio*n ciągu płatności b. Wówczas $D^a - D^b$ wynosi:

A) $-\frac{1}{1+v}$

B) $-\frac{v}{1+v}$

C) $-\frac{v}{1+v^2}$

D) $-\frac{v}{1-v}$

E) $-\frac{v^2}{1+v^2}$

2. Przyjmijmy, że na rynku spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa oraz dostępna jest akcja $\mathcal{A}$ nie płacąca dywidendy. Załóżmy również, że na rynku tym inwestorzy mogą wystawiać i kupować europejskie opcje kupna na akcję $\mathcal{A}$. Cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili T to S_T. W chwili $T = 0$ inwestor sprzedając bądź kupując opcje konstruuje portfel w taki sposób, aby wypłata W w chwili $T = 1$ była następująca:

$$W_1 = \begin{cases} 0 & S_1 < 50 \; lub \; S_1 \geq 250 \\ S_1 - 50 & S_1 \in [50,100] \\ 50 & S_1 \in [100,200] \\ 250 - S_1 & S_1 \in [200,250] \end{cases}.$$

Jaka będzie cena takiego portfela w chwili $T = 0$ przy założeniu, że $r = 2\%$, a zmienność cen akcji $\mathcal{A}$ wynosi $\sigma = 2\%$, a $S_0 = 150$. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 47
B) 48
C) 49
D) 50
E) 51

3. Niech dana będzie nieskończona obligacja zmiennokuponowa o nominale $N = 100$ (nominał nie jest nigdy zwracany, wypłacane są jedynie kupony). Stopa wolna od ryzyka w roku $n = 1,2, \ldots$ wynosi $r_n = \frac{X_n}{100}$, gdzie $(X_n)_{n=1,2\ldots}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $X_n \sim Poisson(\lambda)$, czyli:

$$P(X_n = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0,1,2 \ldots$$

Kupony obligacji płatne są na koniec każdego roku n i uzależnione są od stopy wolnej od ryzyka - wynoszą $r_n \cdot N$. Zakładając, iż $\lambda = 3$ proszę wyznaczyć wartość obligacji w chwili 0, wykorzystując do dyskontowania (w sposób ciągły) strukturę stóp wolnych od ryzyka - t.j. przyjmując, iż czynnik dyskontowy za rok n wynosi e^{-r_n}. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 97
B) 98
C) 99
D) 100
E) 101

4. Rozważmy zapadający za 3 lata instrument o następującej funkcji wypłaty:

$$w(S_2) = \begin{cases} 0 \text{ PLN}, & S_3 > 200, \\ 50\,000 \text{ PLN}, & S_3 \leq 200, \end{cases}$$

gdzie S_3 oznacza cenę niepłacącej dywidendy akcji S na moment zapadalności instrumentu.

Przy standardowych założeniach modelu Blacka-Scholesa wycenić ten instrument wiedząc, że:

- roczna intensywność oprocentowania wynosi 0.03,
- roczna zmienność ceny akcji wynosi 30%,
- cena akcji w momencie wyceny instrumentu wynosi 170 PLN.

Tak obliczona wartość instrumentu wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 16 000.00 PLN
B) 17 000.00 PLN
C) 30 000.00 PLN
D) 32 000.00 PLN
E) 36 000.00 PLN

5. Na rynku, na którym poziom stopy zerokuponowej (w ujęciu rocznym) nie zależy od okresu do zapadalności, inwestor rozważa zakup 4-letniej obligacji o nominale 1 000 PLN, płacącej roczny kupon w wysokości 5% i posiadającej wbudowaną opcję wcześniejszego wykupu przez emitenta za 2 lata od emisji, ale po płatności drugiego kuponu, po cenie 1 000 PLN. Opcja ta jest wykonywana przez emitenta zawsze, gdy jest to dla niego korzystne. Inwestor dokonuje wyceny opisanej obligacji przy założeniu, że:

- w momencie wyceny dwuletnia stopa zerokuponowa (w ujęciu rocznym) wynosi 6%,
- analogiczna stopa zerokuponowa za 2 lata ma rozkład jednostajny na przedziale [4%, 8%].

Kwota, na którą stosując opisany model inwestor wyceni rozważaną obligację wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 802 PLN

B) 964 PLN

C) 985 PLN

D) 1 000 PLN

E) 1 052 PLN

6. Rozważmy nieskończony ciąg odroczonych rent nieskończonych a_N, $\mathrm{N} \geq 1$. Renta wieczysta a_N startująca w roku $\mathrm{N} \geq 1$ płaci kwotę $1/_{k^2}$ na koniec każdego roku $k \geq \mathrm{N}$. Roczna stopa procentowa $i = 4\%$. Niech $PV(a_N)$ oznacza wartość obecną wypłat renty a_N, wyznaczoną na początek roku 1. Suma wartości obecnych wypłat wszystkich rent, czyli $PV(\sum_1^{+\infty} a_N)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 1.00
B) 3.25
C) 25.00
D) 250.00
E) $+\infty$

7. Renta wieczysta wypłaca na końcu roku $3 \cdot n + 1$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, ratę w wysokości $\frac{n \cdot (3 \cdot n - 1)}{3^{n+1}}$. W pozostałych latach raty nie są wypłacane.

Niech $s(v)$ oznacza obecną wartość tej renty obliczoną przy zastosowaniu czynnika dyskontującego v. Proszę obliczyć wartość pochodnej funkcji $s(v)$ dla $v = 0.9$. Podaj najbliższą wartość.

A) 4.0

B) 4.4

C) 4.8

D) 5.2

E) 5.6

8. Zasady spłacania pożyczki o wartości K zaciągniętej na początku roku, są następujące:

- 20 rat płaconych na końcu kolejnych lat, przy czym pierwsza rata jest płacona po upływie roku od daty otrzymania pożyczki,
- pierwszych 5 rat spełnia warunek, iż każda następna jest o 2% większa od poprzedniej,
- w przypadku następnych 5 rat, każda rata jest mniejsza od poprzedniej o 10,
- ostatnie 11 rat ma jednakową wysokość,
- stopa oprocentowania wynosi *i*, a odpowiadający jej czynnik dyskontowy równy jest *v*.

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów wyraża wielkość pierwszej raty.

A) $$\frac{K\cdot i+50\cdot v^{20}-10\cdot v^{10}+10\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5|}})}{v\cdot i\cdot\frac{1-(1{,}02\cdot v)^5}{1-1{,}02\cdot v}+1{,}02^4\cdot(v^5-v^{20})}$$

B) $$\frac{K\cdot i-10\cdot v^{20}-50\cdot v^{10}+10\cdot v^{5}\cdot(1+a_{\overline{10|}})}{v\cdot i\cdot\frac{1-(1{,}02\cdot v)^5}{1-1{,}02\cdot v}+1{,}02^4\cdot(v^{10}-v^{20})}$$

C) $$\frac{K\cdot i+50\cdot v^{20}-10\cdot v^{10}+10\cdot v^{10}\cdot(1+a_{\overline{5|}})}{v\cdot i\cdot\frac{1-(1{,}02\cdot v)^5}{1-1{,}02\cdot v}+1{,}02^4\cdot(v^5-v^{10})}$$

D) $$\frac{K\cdot i-10\cdot v^{20}+50\cdot v^{10}+10\cdot v^{5}\cdot(1+a_{\overline{10|}})}{v\cdot i\cdot\frac{1-(1{,}02\cdot v)^5}{1-1{,}02\cdot v}+1{,}02^4\cdot(v^{10}-v^{20})}$$

E) $$\frac{K\cdot i-50\cdot v^{20}-10\cdot v^{10}+10\cdot v^{5}\cdot(1+a_{\overline{5|}})}{v\cdot i\cdot\frac{1-(1{,}02\cdot v)^5}{1-1{,}02\cdot v}+1{,}02^4\cdot(v^5-v^{20})}$$

9. Kredyt jest wypłacany przez bank w 4 transzach, płatnych na początku roku w odstępach rocznych. Wiadomo, że wysokość pierwszej transzy wynosi *T*, a każda kolejna transza jest większa od poprzedniej o 10%.

Każda transza kredytu spłacana jest w postaci 10 letniej renty o równych płatnościach dokonywanych na końcu kolejnych lat, przy czym pierwsza rata płacona jest po upływie roku od wypłacenia danej transzy kredytu.

Wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w ratach płatnych na końcu 6, 7, i 8 roku (lata są liczone od momentu wypłaty pierwszej transzy kredytu) wynosi 89 036, a stopa procentowa jest równa 6%. Wyznaczyć wartość *T*. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 130 000
B) 140 000
C) 150 000
D) 160 000
E) 170 000

10. Kredyt jest spłacany w 25 ratach płatnych na końcu kolejnych lat, przy stopie oprocentowania równej 7%. Raty mają postać następującą:

$$A, A-B, A-2B, \ldots, A-8B, A-9B, A-8B, A-7B, A-6B, \ldots, A+6B.$$

Wiadomo, że wartość kapitału spłaconego w 5 racie wynosi 3 886, a wysokość kapitału spłaconego w 20 racie wynosi 13 225. Obliczyć wysokość 15 raty. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 13 000
B) 14 000
C) 15 000
D) 16 000
E) 17 000

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 września 2015 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	B	
4	C	
5	B	
6	B	
7	B	
8	E	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.