

Zadanie 1

Rozważmy zmienne losowe N , X , Y . Wiadomo, że rozkład warunkowy zmiennej losowej N , gdy $X = x$ i $Y = y$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej x . Rozkład warunkowy zmiennej losowej X , gdy $Y = y$ jest rozkładem $Gamma(2, y)$, a rozkład zmiennej Y jest rozkładem $Gamma(5, 3)$, gdzie rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$p_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Wtedy wariancja $VarN$ jest równa

- (A) $\frac{3}{2}$
- (B) $\frac{15}{4}$
- (C) $\frac{27}{8}$
- (D) 3
- (E) $\frac{9}{4}$

Zadanie 2

Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-1, 1)$.

Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ i ma rozkład ujemny dwumianowy

$$P(N = n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ gdy } n = 0, 1, 2, \dots$$

Niech

$$Y_i = \min\left\{X_i, \frac{1}{2}\right\}, \quad Z_i = X_i - Y_i.$$

Niech

$$S^{(Y)} = \sum_{i=1}^N Y_i, \quad S^{(Z)} = \sum_{i=1}^N Z_i.$$

Oblicz $\text{Cov}(S^{(Y)}, S^{(Z)})$.

(A) $-\frac{6}{16}$

(B) $-\frac{1}{16}$

(C) $\frac{9}{16}$

(D) $\frac{12}{16}$

(E) $\frac{4}{16}$

Zadanie 3

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Estymując parametr $m = E(X^2)$ wyznaczono dwa estymatory:

$$T_1 = \bar{X}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$T_2 = \bar{X}^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$\text{gdzie } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Różnica błędów średniokwadratowych estymatora T_1 i estymatora T_2 jest równa

(A) $\frac{\sigma^4(3-5n)}{n^2(n-1)}$

(B) $\frac{\sigma^4(n-3)}{n^2(n-1)}$

(C) $\frac{2\sigma^4}{n^2(n-1)}$

(D) $\frac{2\sigma^4(1-2n)}{n^2(n-1)}$

(E) $\frac{\sigma^4(1-3n)}{n^2(n-1)}$

Zadanie 4

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 3$ oraz niech dla $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 3 & \text{gdy } X_n = 3 \\ \min(Y_{n-1}, X_n) & \text{gdy } X_n < 3 \end{cases}$$

Oblicz $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n Y_{n-1})$

- (A) $\frac{35}{24}$
- (B) 1
- (C) $\frac{21}{24}$
- (D) $\frac{19}{12}$
- (E) $\frac{13}{12}$

Zadanie 5

Obserwujemy pary $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{20}, Y_{20})$ zmiennych losowych. Zmienne X_1, X_2, \dots, X_{20} są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(m_x, 1)$, a zmienne Y_1, Y_2, \dots, Y_{20} o rozkładzie normalnym $N(m_y, \sigma^2)$, gdzie $\sigma^2 = 4$. Zakładając, że wszystkie zmienne są niezależne zbudowano test najmocniejszy hipotezy:

$$H_0: (m_x, m_y) = (0, 0)$$

przeciw alternatywie:

$$H_1: (m_x, m_y) = (1, 1),$$

na poziomie istotności $\alpha = 0,05$.

Wyznaczyć rozmiar testu, jeśli w rzeczywistości pary $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{20}, Y_{20})$ są niezależne, ale zmienne losowe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, 20$, przy prawdziwości hipotezy

H_0 , mają rozkłady normalne o macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

- (A) 0,123
- (B) 0,067
- (C) 0,082
- (D) 0,017
- (E) 0,010

Zadanie 6

Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta, \lambda}(x) = \begin{cases} \frac{\theta \lambda^\theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\lambda, \theta > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech $\hat{\theta}_n, \hat{\lambda}_n$ będą estymatorami tych parametrów otrzymanymi metodą największej wiarygodności w oparciu o próbę n elementową. Chcemy dobrać stałą t tak, aby przy n dążącym do nieskończoności

prawdopodobieństwo zdarzenia $\left| \frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\lambda}_n} - \frac{\theta}{\lambda} \right| \sqrt{n} < t$ było równe 0,9.

Jeżeli $\theta = 3$ i $\lambda = 1$, to stała t jest równa

- (A) 4,35
- (B) 6,27
- (C) 8,06
- (D) 11,52
- (E) 3,82

Zadanie 7

W urnie znajdują się trzy kule białe i dwie czarne. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, odkładamy na bok i dorzucamy do urny kulę białą. Dopiero po trzykrotnym powtórzeniu doświadczenia w urnie nie było kul czarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszym doświadczeniu wylosowano kulę czarną.

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{6}{125}$

(D) $\frac{8}{125}$

(E) $\frac{4}{7}$

Zadanie 8

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{gd}y \ x > 0 \\ 0 & \text{gd}y \ x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator funkcji $g(\theta) = P_{\theta}(X_1 > 1)$ postaci $\hat{g}(T) = P(X_1 > 1 | T)$, gdzie $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Jeżeli zaobserwowano $T = t > 1$, to $\hat{g}(t)$ jest równe

(A) $\left(\frac{t-1}{t}\right)^n$

(B) $\left(\frac{t-1}{t}\right)^{n-1}$

(C) $\left(\frac{t-1}{t}\right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{t} + 1\right)$

(D) $\left(\frac{t-1}{t}\right)^{2n} \left(\frac{2n}{t} + 1\right)$

(E) $\left(\frac{t-1}{t}\right)^{2n-2} \left(\frac{2n-2}{t} + 1\right)$

Zadanie 9

Przez 5 dni przeprowadzano egzaminy. Każdego dnia z puli 100 różnych pytań egzaminacyjnych losowano bez zwracania 20 pytań. Oblicz wartość oczekiwaną liczby pytań, które zostały wylosowane dokładnie 3 razy.

- (A) 4,25
- (B) 5,12
- (C) 10
- (D) 6,75
- (E) 8,24

Zadanie 10

Niech X_1, X_2, \dots, X_6 będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f_\lambda(x) = \lambda \exp(-\lambda x),$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem.

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i , tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych Z_1, Z_2, \dots, Z_6 , gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że $a \leq k$).

Wyznaczono estymator *największej wiarygodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach Z_1, Z_2, \dots, Z_6 .

Jeżeli $\lambda = 1$, to prawdopodobieństwo $P(\hat{\lambda} > 1,9)$ jest równe

- (A) 0,205
- (B) 0,064
- (C) 0,141
- (D) 0,632
- (E) 0,087

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 września 2015 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	B	
2	E	
3	A	
4	D	
5	C	
6	C	
7	E	
8	E	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.