Zadanie 1.

Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2 są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2k}\right) \cdot \Pr(N_1 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \cdot \Pr(N_2 = k-1), \qquad k = 1,2,3,...$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 = 5)$ wynosi:

(A) $\frac{112}{1024}$

(B) $\frac{126}{1024}$

(C) $\frac{210}{1024}$

(D) $\frac{224}{1024}$

(E) $\frac{252}{1024}$

Zadanie 2.

Y_1 i Y_2 to dwie niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie Pareto o dystrybuancie danej na półosi dodatniej wzorem:

$F(y) = 1 - \left(\frac{v}{v+y}\right)^{\alpha}$,

Gdzie wartość parametru kształtu wynosi $\alpha = 2$, zaś parametr skali v jest liczbą dodatnią.

Przyjmijmy oznaczenia:

$M \coloneqq max\{Y_1, Y_2\}$,

$S \coloneqq Y_1 + Y_2$.

Udział wartości oczekiwanej większej z tych zmiennych w wartości oczekiwanej ich sumy, a więc $\frac{\mathrm{E}M}{\mathrm{E}S}$, wynosi:

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{7}{8}$

(D) $\frac{9}{10}$

(E) $\frac{11}{12}$

Zadanie 3.
Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność λ (rocznie) charakteryzująca pojedynczą jednostkę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu parametru ryzyka Λ w tej populacji:

$$\mathrm{E}\Lambda = \frac{2}{7}, \quad \mathrm{E}\left(\Lambda^2\right) = \frac{6}{49}, \quad \mathrm{E}\left(\Lambda^3\right) = \frac{24}{343}.$$

Niech N oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu roku. Współczynnik skośności zmiennej N wynosi:

(A) $\frac{40}{16}$

(B) $\frac{39}{16}$

(C) $\frac{38}{16}$

(D) $\frac{37}{16}$

(E) $\frac{36}{16}$

Zadanie 4.
Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb $T_1, T_2, ..., T_N$ jest losowy)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich t wzorem: $f(t) = (2/3)^t \ln(3/2)$ przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa N ma rozkład ucięty Poissona o funkcji prawdopodobieństwa:
  $$\Pr(N = k) = \frac{(\ln(2))^k}{k!}, \quad k = 1,2,3, ...$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:
$$\Pr(N > 1 | A)$$
Z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.427

(B) 0.370

(C) 0.303

(D) 0.256

(E) 0.213

Zadanie 5.
Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poissona. Rozkłady te różnią się zarówno parametrem częstotliwości szkód, jak i rozkładem wartości pojedynczej szkody. W każdym jednak przypadku wartość pojedynczej szkody może wynieść jedynie 1, 2 lub 3. Parametry tych rozkładów podane są w poniższej tabeli, w której Y symbolizuje zmienną reprezentującą wartość pojedynczej szkody.

Numer rozkładu	częstotliwość	$\Pr(Y=1)$	$\Pr(Y=2)$	$\Pr(Y=3)$
1	2/3	1/2	0	1/2
2	2/3	1/2	1/2	0
3	5/3	8/10	1/10	1/10

Przy tych założeniach parametr a wzoru:

- $\Pr(X=3) = aexp(-3)$

wynosi:

(A) $17/6$

(B) $16/6$

(C) $15/6$

(D) $14/6$

(E) $13/6$

Zadanie 6.
Każdy kierowca z pewnej populacji zgłasza szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność λ (rocznie) charakteryzująca pojedynczego kierowcę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Populacja jest zamknięta, a kierowcy migrują pomiędzy trzema klasami bardzo prostego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie 2, o ile w danym roku był w klasie 1;
- Ląduje w klasie 3, o ile w danym roku był w klasie 2.

Rozkład wartości parametru λ w przekroju populacji jest rozkładem gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$, z parametrami równymi $(\alpha, \beta) = (2, 6)$.

W celu skalkulowania składki adekwatnej dla osób przebywających w klasie drugiej liczymy warunkową wartość oczekiwaną:

- $\mathrm{E}(N_3 | N_1 > 0, N_2 = 0)$,

gdzie N_3 to liczba szkód które zostaną zgłoszone w roku nadchodzącym, zaś N_2 oraz N_1 to odpowiednio liczba szkód w roku upływającym oraz rok wcześniej, a wszystkie trzy liczby dotyczą losowo dobranego kierowcy z tej populacji.
Owa warunkowa wartość oczekiwana wynosi:

(A) $143/420$

(B) $153/420$

(C) $156/420$

(D) $162/420$

(E) $169/420$

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:
$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3 są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$
- $\mathrm{E}(Y_1) = 4$

Wiemy też, że $c > 4\lambda$.

Interesuje nas warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny, pod warunkiem że do ruiny dojdzie. Informacje są nazbyt skąpe, aby ją wyznaczyć, można jednak określić przedział, który zawiera wszystkie jej możliwe wartości, i równocześnie nie zawiera nic ponadto. Ten przedział to:

(A) $[0, 5]$

(B) $[0, 10]$

(C) $[2, 5]$

(D) $[2, 10]$

(E) $[4, 10]$

Zadanie 8.
Rozważamy proces nadwyżki z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie takim, że $\Pr(W \geq 0) = 1$. Załóżmy, że $c < \mathrm{E}(W) < \infty$, wobec czego ruina jest pewna. Niech:
$T(u) = \inf\{n: \ n \in \{0,1,2,...\}, \ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny, zaś $\mathrm{E}(T(u))$ oczekiwany czas ruiny. Oczywiście dla ujemnych wartości *u* zachodzi $\mathrm{E}(T(u)) = 0$.
Która z poniższych tożsamości całkowych spełniona jest przez funkcję $\mathrm{E}(T(u))$ dla nieujemnych wartości *u*?

(A) $\mathrm{E}(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + \int_0^{u+c} \mathrm{E}(T(u+c-x))dF_W(x)$

(B) $\mathrm{E}(T(u)) = \int_0^{u+c} \mathrm{E}(T(u+c-x))dF_W(x)$

(C) $\mathrm{E}(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} \mathrm{E}(T(u+c-x))dF_W(x)$

(D) $\mathrm{E}(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + F_W(u+c) \cdot \int_0^{u+c} \mathrm{E}(T(u+c-x))dF_W(x)$

(E) $\mathrm{E}(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + F_W(u+c) \cdot \int_0^{u+c} [1 + \mathrm{E}(T(u+c-x))]dF_W(x)$

Zadanie 9.
Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, ($X = 0$ gdy $N = 0$)

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej licznie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $x \geq 0$ dystrybuantą:

- $F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp\left(-a \cdot \exp(b\lambda) \cdot x\right)$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma(α, β), o gęstości:

- $f_\Lambda(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = \frac{1}{11}$, $b = 2$
- $\alpha = 4$, $\beta = 10$

Wobec tego iloraz:

- $\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(Y)}$

wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{11}{12}$

(C) $\frac{10}{11}$

(D) $\frac{10}{12}$

(E) $\frac{9}{11}$

Zadanie 10.
Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0,+\infty)$
- z pewną, być może dodatnią masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$,

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t\to\infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej,
- $h_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \dfrac{2}{(4+t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{1}{2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 marca 2016 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	E	
4	B	
5	A	
6	E	
7	C	
8	C	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.