Zadanie 1

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x^2 & \text{gdy } x\in(-1,1)\wedge 0<y<|x| \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech $U=X+Y$ i $V=X-Y$. Wtedy $E\left(V\,|\,U=-\frac{1}{2}\right)$ jest równa

(A) $-\frac{8}{7}$

(B) $-\frac{5}{4}$

(C) $-\frac{7}{8}$

(D) $-\frac{31}{28}$

(E) $-\frac{15}{14}$

Zadanie 2

Załóżmy, że $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1).
Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda > 0$.
Niech

$$m_N = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_{N+1}\} \quad \text{i} \quad M_N = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{N+1}\}.$$

Oblicz $E(M_N \mid m_N = t)$, gdy $t \in (0,1)$.

(A) $\frac{1}{\lambda}\left(1-(1-t)\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)$

(B) $\frac{1}{\lambda}\left(\lambda-(1-t)\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)$

(C) $\frac{1}{\lambda}(1-t)\left(1-e^{-\lambda}\right)$

(D) $1-\frac{1-t}{\lambda+1}$

(E) $t+\frac{1-t}{\lambda+1}$

Zadanie 3

Niech X oznacza zmienną losową równą liczbie sukcesów w n ($n \geq 2$) niezależnych próbach Bernoulliego, przy czym prawdopodobieństwo sukcesu θ ($\theta \in (0,1)$) jest nieznane.

Rozważamy estymator parametru θ postaci $\hat{\theta} = aX + b$, o wartościach nieujemnych, którego błąd średniokwadratowy jest stały niezależny od wartości parametru θ.
Wariancja tego estymatora jest równa

(A) $\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$

(B) $\dfrac{\theta(1-\theta)}{2(\sqrt{n}-1)^2}$

(C) $\dfrac{\theta(1-\theta)}{(\sqrt{n}+1)^2}$

(D) $\dfrac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$

(E) $\dfrac{\theta(1-\theta)}{(\sqrt{n}-1)^2}$

Zadanie 4

Rzucono niezależnie 16 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskano nie więcej niż 5 serii, jeśli wiadomo, że uzyskano 10 orłów i 6 reszek.

(A) $\frac{48}{1001}$

(B) $\frac{47}{1001}$

(C) $\frac{44}{1001}$

(D) $\frac{46}{1001}$

(E) $\frac{45}{1001}$

Uwaga. Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu *a* i 2 serie elementów typu *b*).

Zadanie 5

Niech $Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie a i b są nieznanymi parametrami, x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są znanymi liczbami i ε_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 4. Na podstawie zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ weryfikujemy hipotezę $H_0 : a = -1 \wedge b = 1$ przy alternatywie $H_1 : a = 0 \wedge b = -1$ testem najmocniejszym na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Niech $F(z)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego w punkcie z. Wtedy moc tego testu jest równa

(A) $F\left(1{,}645 + \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + 2)^2}\right)$

(B) $1 - F\left(1{,}645 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}\right)$

(C) $F\left(1{,}645 + \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}\right)$

(D) $1 - F\left(1{,}645 - \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}\right)$

(E) $1 - F\left(1{,}645 - \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + 2)^2}\right)$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{gdy } x \le 1 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\hat{\theta}_n$ będzie estymatorem parametru θ otrzymanym metodą największej wiarogodności w oparciu o próbę n elementową. Dobrano stałą t tak, aby estymator $T = t\hat{\theta}_n$ był estymatorem nieobciążonym parametru θ.
Błąd średniokwadratowy otrzymanego estymatora T jest równy

(A) $\dfrac{\theta^2}{n-1}$

(B) $\dfrac{\theta^2}{n-2}$

(C) $\dfrac{(n-1)\theta^2}{n^2}$

(D) $\dfrac{\theta^2}{n}$

(E) $\dfrac{(n-1)\theta^2}{n(n-2)}$

Zadanie 7

Rzucamy symetryczną kostką do gry tak długo, aż co najmniej jeden raz uzyskamy 1, 2 i 3 oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że czynność powtórzymy 5 razy.

(A) $\frac{90}{6^4}$

(B) $\frac{151}{6^4}$

(C) $\frac{97}{6^4}$

(D) $\frac{272}{6^4}$

(E) $\frac{124}{6^4}$

Zadanie 8

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ spełniają warunek $X_i = aX_{i-1} + \varepsilon_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie $X_0 = 1$, a jest nieznanym parametrem rzeczywistym i ε_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. O parametrze a zakładamy, że jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 2.
Wyznaczono estymator bayesowski parametru a przy kwadratowej funkcji straty i wektorze obserwacji $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a następnie najkrótszy przedział $[\hat{a}_1, \hat{a}_2]$, taki że prawdopodobieństwo a posteriori zdarzenia, że $a \in [\hat{a}_1, \hat{a}_2]$ jest równe 0,95.
Przedział ten jest postaci

(A) $$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}} - 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}} + 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}}\right]$$

(B) $$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}} - 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}} + 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}\right]$$

(C) $$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}} - 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}} + 1{,}96\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}}\right]$$

(D) $$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}} - 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}} + 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}}}\right]$$

(E) $$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}} - 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}} + 1{,}96\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 + \frac{1}{2}}}\right]$$

Zadanie 9

Niech X_1 będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1), X_2 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_1)$, X_3 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_2)$.
Wtedy $Var(12(X_1 + X_2 + X_3))$ jest równa

(A) $\frac{187}{12}$

(B) $\frac{31}{3}$

(C) $\frac{52}{3}$

(D) $\frac{94}{3}$

(E) $\frac{565}{12}$

Zadanie 10

W urnie znajduje się 20 kul: a kul białych i 20-a kul czarnych, gdzie $a \in \{1,2,\ldots,19\}$ jest nieznanym parametrem. Trzy razy niezależnie powtarzamy doświadczenie: losujemy ze zwracaniem po jednej kuli tak długo, aż wylosujemy kulę białą i za każdym razem zliczamy ile razy wyciągnęliśmy kulę czarną. Na podstawie tego eksperymentu weryfikujemy hipotezę $H_0 : a \leq 5$ przy alternatywie $H_1 : a > 5$ testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności $\frac{53}{512}$.

Błąd drugiego rodzaju tego testu przy alternatywie $a = 10$ jest równy

(A) $\frac{9}{16}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{7}{16}$

(E) $\frac{5}{16}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 marca 2016 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	C	
4	B	
5	D	
6	B	
7	C	
8	A	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.