

**Zadanie 1.**

Niech  $F_W$  oznacza dystrybuantę sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o dystrybuantach odpowiednio  $F_1$  oraz  $F_2$ :

Dla $x < 0$	$F_1(x) = 0$	$F_2(x) = 0$
Dla $x \in [0,1)$	$F_1(x) = 0.6 + 0.2x$	$F_2(x) = 0.7 + 0.1x$
Dla $x \geq 1$	$F_1(x) = 1$	$F_2(x) = 1$

$F_W(3/2)$  wynosi:

- (A) 0.9200
- (B) 0.9225
- (C) 0.9250
- (D) 0.9275
- (E) 0.9300

**Zadanie 2.**

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$U_n = u + X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , gdzie:

- $u$  to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \dots$  są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;
- rozkład zmiennej  $X_1$  jest czteropunktowy:  
 $\Pr(X_1 = 2) = p_2,$   
 $\Pr(X_1 = 1) = p_1,$   
 $\Pr(X_1 = 0) = p_0,$   
 $\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2.$

Niech  $N = \min\{n: U_n < 0\}$  oznacza czas ruiny.

Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą:  $p_0 = 3/10$ ,  $p_1 = 1/10$ ,  $p_2 = 1/10$ , oraz  $u = 11/2$ . W tych warunkach ruina jest pewna, a więc  $\Pr(N < \infty) = 1$ . Wobec tego oczekiwany czas do ruiny  $E(N)$  jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

- (A) 12
- (B) 15
- (C) 20
- (D) 25
- (E) 30

**Zadanie 3.**

Dwa nieobciążone predyktory  $\hat{\Theta}_1$  i  $\hat{\Theta}_2$  parametru ryzyka  $\Theta$  obarczone są błędami o wariancji odpowiednio 4 i 2 oraz kowariancji  $5/2$ . Predyktor kombinowany  $\hat{\Theta}_3(z) = z\hat{\Theta}_1 + (1-z)\hat{\Theta}_2$  obarczony jest błędem o najmniejszej wariancji gdy współczynnik  $z$  równy jest:

- (A)  $-1/2$
- (B)  $-1/4$
- (C)  $0$
- (D)  $1/4$
- (E)  $1/2$

**Zadanie 4.**

Łączna wartość odszkodowań z pewnego jednorodnego portfela ryzyk ma rozkład złożony Poissona o funkcji generującej momenty postaci:

$$M_s(t) = \exp\left[\frac{4t(10-t)}{(5-t)^2}\right], \quad t < 5.$$

W portfelu tym liczba pojawiających się roszczeń ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 5. Pojawiające się roszczenie z prawdopodobieństwem  $p$  jest oddalone, a z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$  odpowiadające mu odszkodowanie ma pewien rozkład ciągły na dodatniej półosi. Prawdopodobieństwo oddalenia roszczenia  $p$  wynosi:

- (A)  $\frac{1}{5}$
- (B)  $\frac{2}{5}$
- (C)  $\frac{1}{2}$
- (D)  $\frac{3}{4}$
- (E)  $\frac{4}{5}$

**Zadanie 5.**

Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu  $t$  następuje jeszcze w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{22}$ , a w miesiącu  $t + k$  (dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ ), z

prawdopodobieństwem  $\frac{5}{22} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ . Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach

$t$ ,  $t+1$  i  $t+2$  zaistniały odpowiednio 88, 110 i 143 szkody. Wyznacz stan rezerwy na niewypłacone odszkodowania na koniec miesiąca  $t+2$ , jeśli na początku miesiąca  $t$  stan tej rezerwy wynosił 320.

- (A) 327
- (B) 372
- (C) 385
- (D) 405
- (E) brakuje danych o strukturze rezerwy na początku  $t$ -tego miesiąca

**Zadanie 6.**

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody  $Y$  wiemy, iż jest to rozkład ciągły z dystrybuantą ściśle rosnącą na przedziale  $(0, M)$ , oraz iż  $\Pr(Y \in (0, M)) = 1$ . Ponadto wiemy, iż składka netto za nadwyżkę szkody ponad  $d$  jest dla  $d \in (4, 6)$  dana wzorem:

$$E[(Y - d)_+] = \frac{(10 - d)^3}{300}.$$

Niech  $Z_E$  oznacza zbiór możliwych wartości  $E(Y)$ , zaś  $Z_M$  zbiór możliwych wartości  $M$ . Zbiory te mają postać:

(A)  $Z_E = (2.16, 4.72), \quad Z_M = (7, \infty)$

(B)  $Z_E = (2.16, 4.72), \quad Z_M = \left(7\frac{1}{3}, \infty\right)$

(C)  $Z_E = (1.56, 3\frac{1}{3}), \quad Z_M = (7, \infty)$

(D)  $Z_E = (1.56, 4.72), \quad Z_M = \left(7\frac{1}{3}, \infty\right)$

(E)  $Z_E = (2.16, 3\frac{1}{3}), \quad Z_M = (7, \infty)$

**Zadanie 7.**

W klasycznym modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym rozkład wartości pojedynczej szkody  $Y$  ma gęstość:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{64}{(2+y)^5} & \text{dla } y > 0 \\ 0 & \text{dla } y \leq 0 \end{cases},$$

oczekiwana ilość szkód na jednostkę czasu  $\lambda = 3$ , a pochodna funkcji gromadzonej składki  $c = 2.5$ . Współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*)  $R$  wynosi:

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B)  $\frac{2}{3}$
- (C) 1
- (D)  $\frac{4}{3}$
- (E) jest nieokreślony

**Zadanie 8.**

Obserwujemy realizacje  $x_{it}$  łącznej wartości szkód  $X_{it}$   $i$ -tego ubezpieczonego w  $t$ -tym roku dla  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ;  $N > 2$ ,  $T > 2$ ;

nie znamy natomiast wartości następujących parametrów:

$$\mu(\Theta_i) = E(X_{it} / \Theta_i),$$

$$\sigma^2(\Theta_i) = \text{VAR}(X_{it} / \Theta_i),$$

$$\mu = E(\mu(\Theta_i)),$$

$$s^2 = E(\sigma^2(\Theta_i)),$$

$$a = \text{VAR}(\mu(\Theta_i));$$

wiemy natomiast, że jeśli  $i \neq j$  lub  $t \neq s$  to  $\text{COV}(X_{it}, X_{js} / \Theta_i, \Theta_j) = 0$ .

Niech  $\bar{X}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{it}$ ,  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i$ .

Mamy dwa estymatory parametru  $a$ :

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{NT-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (X_{it} - \bar{X})^2 - \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (X_{it} - \bar{X}_i)^2,$$

oraz:

$$\hat{a}_2 = \max\{\hat{a}_1, 0\}.$$

Niech  $MSE(\hat{a}_i) = E[(\hat{a}_i - a)^2]$ .

Wybierz zdanie prawdziwe:

- (A) oba estymatory są nieobciążone,  $\text{VAR}(\hat{a}_1) < \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (B) oba estymatory są nieobciążone,  $\text{VAR}(\hat{a}_1) > \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (C)  $E(\hat{a}_1) < E(\hat{a}_2)$ ,  $\text{VAR}(\hat{a}_1) < \text{VAR}(\hat{a}_2)$
- (D)  $\text{VAR}(\hat{a}_2) < MSE(\hat{a}_2) < \text{VAR}(\hat{a}_1)$
- (E)  $\text{VAR}(\hat{a}_2) < \text{VAR}(\hat{a}_1) < MSE(\hat{a}_2)$



**Zadanie 9.**

Wyjściowy portfel składa się z  $n$  niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla pojedynczego ryzyka ma wartość oczekiwaną  $\mu$  i odchylenie standardowe  $\sigma$ .  $S$  oznacza łączną wartość szkód z całego portfela ryzyk. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości  $G$  tak, aby:

$$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01,$$

przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.

Dla naszego portfela wyjściowego mamy:

$$n = 1000, \quad \mu = 10, \quad \sigma = 10.$$

Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych  $n_1$  ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych  $n$  ryzyk z portfela wyjściowego.

Ich charakterystyki to:

$$\mu_1 = 10, \quad \sigma_1 = 15,$$

Jednakże warunkiem objęcia „nowych” ryzyk jest zaoferowanie pokrycia za składkę w tej samej wysokości  $G$ , co dla „starych” ryzyk. Niech  $S_1$  oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich  $n_1$  mamy:

$$\Pr(S + S_1 > (n + n_1) \cdot G) \leq 0.01 ?$$

*(Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej)*

- (A) Dla  $n_1 \leq 250$
- (B) Dla  $n_1 \geq 1500$
- (C) Dla  $n_1 \geq 250$
- (D) Dla każdego  $n_1$
- (E) Dla żadnego  $n_1$

**Zadanie 10.**

Łączna wartość szkód  $S$ :

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

ma złożony rozkład geometryczny. Iloraz postępu rozkładu liczby szkód równy jest  $\frac{1}{2}$ , zaś zmienna  $X_1$  ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2.

$\Pr(S \leq 4 \ln 5)$  wynosi:

- (A) 0.9
- (B) 0.8
- (C) 0.6
- (D) 0.5
- (E) 0.3

**Egzamin dla Aktuariuszy z 23 maja 2016 r.****Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	E	
3	A	
4	A	
5	C	
6	B	
7	E	
8	D	
9	C	
10	A	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.