Zadanie 1

Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady o gęstościach f_X i f_Y, gdzie

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^2 e^{-2x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

i

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{8}{3} x^3 e^{-2x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech $V = \frac{X}{X+Y}$. Wtedy $Var(V)$ jest równa

(A) $\frac{3}{49}$

(B) $\frac{3}{98}$

(C) $\frac{1}{36}$

(D) $\frac{5}{98}$

(E) $\frac{5}{49}$

Zadanie 2

Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym takim, że

$$P(N=n)=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots,$$

zaś $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ będą zmiennymi losowymi niezależnymi od N i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda ze zmiennych X_i ma rozkład Bernoulli'ego: $P(X_i=1)=p$ i $P(X_i=0)=q$, gdzie $p+q=1$, $0<p<1$.

Niech $N_1=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} X_i & gdy\ N>0\\ 0 & gdy\ N=0\end{cases}$ i $N_0=N-N_1$.

Wtedy $E\left[\frac{N_1}{N_0+1}\right]$ jest równa

(A) $\frac{8p}{9q}$

(B) $\frac{p}{q}$

(C) $\frac{p}{q}\left[1-\left(\frac{2}{3-p}\right)^2\right]$

(D) $\frac{p}{q}\left[1-\left(\frac{1}{3-2p}\right)^2\right]$

(E) $\frac{p}{q}\left[1-\frac{2}{(3-2p)^2}\right]$

Zadanie 3

Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Nie obserwujemy zmiennej X, ale zmienną Y równą X, gdy X jest większe od 3. Nie wiemy, ile było obserwacji zmiennej X nie większych niż 3 ani jakie były ich wartości. W wyniku tego eksperymentu otrzymujemy próbkę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_9$. Na podstawie próbki budujemy przedział ufności dla parametru θ postaci $[c_1 T, c_2 T]$, gdzie T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ, a stałe c_1 i c_2 dobrane są tak, by

$$P_\theta(\theta < c_1 T) = P_\theta(\theta > c_2 T) = 0{,}05.$$

Wtedy długość przedziału ufności jest równa

(A) $1{,}437T$

(B) $1{,}985T$

(C) $1{,}082T$

(D) $1{,}028T$

(E) $0{,}514T$

Zadanie 4

Rozważamy ciąg niezależnych dwuwymiarowych zmiennych losowych $(X_n, Y_n)_{n=1}^{+\infty}$, gdzie dla każdego n zmienne X_n i Y_n są też niezależne i mają rozkłady Laplace'a o gęstości $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$.

Niech

$$S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \quad \text{i} \quad |S_n| = \sqrt{S_{n,1}^2 + S_{n,2}^2}.$$

Stałą c dobrano tak, by

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|S_n| > c\sqrt{n}\right) = 0{,}05.$$

Stała c jest równa

(A) 3,46

(B) 2,48

(C) 1,73

(D) 3,29

(E) 2,77

Zadanie 5

Zakładając wstępnie, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ są niezależne i mają rozkłady normalne $X_i \sim N(mi, i^2)$, $i = 1,2,\ldots,16$, zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : m = 0$ przy alternatywie $H_1 : m > 0$ na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości wektor $(X_1, X_2, \ldots, X_{16})$ ma rozkład normalny taki, że $EX_i = mi$, $VarX_i = i^2$, $i = 1,2,\ldots,16$, oraz współczynnik korelacji

$$\rho(X_i, X_j) = \begin{cases} 0{,}5 & gdy \quad |i-j| = 1 \\ 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & w\ pp \end{cases}.$$

Wyznaczyć rzeczywisty rozmiar testu.

(A) 0,09

(B) 0,12

(C) 0,21

(D) 0,17

(E) 0,02

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu ciągłego o ściśle rosnącej dystrybuancie, niech m będzie medianą tego rozkładu.
Budujemy przedział ufności dla parametru m w oparciu o statystyki pozycyjne postaci

$$\left[X_{3:10}, X_{7:10}\right].$$

Poziom ufności tego przedziału jest równy

(A) $\frac{115}{128}$

(B) $\frac{101}{128}$

(C) $\frac{99}{128}$

(D) $\frac{114}{128}$

(E) $\frac{106}{128}$

Zadanie 7

Zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX = 0,\ EY = EZ = 1$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var(X(Y+Z))$.

(A) 11

(B) 13

(C) 12

(D) 10

(E) 14

Zadanie 8

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają rozkłady jednostajne na przedziale $(0,1)$. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 2 i jest niezależna od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N+1} X_i$ oraz $V_N = \frac{X_1}{S_N}$.

Wtedy kowariancja $Cov(V_N, N)$ jest równa

(A) 0

(B) $\frac{2}{3}e^{-2}$

(C) $\frac{1}{2}(e^{-2}+1)$

(D) $\frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}$

(E) $\frac{4}{3}e^{-2} - \frac{1}{3}$

Zadanie 9

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma $Gamma(3,\theta)$ o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta^3}{2} x^2 e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. O parametrze θ zakładamy, że jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie gamma $Gamma(2,4)$ i hipotezę $H_0 : \theta = 1$ weryfikujemy testem o obszarze krytycznym

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) : \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_5) > c\}$$

gdzie $\hat{\theta}$ jest estymatorem bayesowskim parametru θ przy kwadratowej funkcji straty a stała c dobrana jest tak, by test miał rozmiar 0,05.
Wtedy stała c jest równa

(A) 1,42

(B) 2,14

(C) 2,23

(D) 1,51

(E) 1,28

Zadanie 10

Mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w I urnie znajdują się 2 kule białe i 1 czarna, a w II urnie 1 kula biała i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Niech X_n oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po n-tym powtórzeniu czynności.
Wtedy granica

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n X_{n+1})$$

jest równa

(A) 1,5

(B) 2

(C) 3

(D) $\frac{12}{5}$

(E) $\frac{4}{5}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 maja 2016 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	A	
5	B	
6	C	
7	A	
8	D	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.