

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy
XLVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Na rynku dostępna jest europejska opcja kupna na akcję spółki A. Bieżąca cena akcji spółki A wynosi $S_0 = 200$ PLN. Przyjmujemy dwa scenariusze rozwoju rynku finansowego:
- scenariusz 1: po roku cena akcji spółki A wzrośnie o 10%
 - scenariusz 2: po roku cena akcji spółki A spadnie o 15%.

Inwestor zajmuje długą pozycję w europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki A o cenie wykonania równej S_0 i okresie do wykonania równym 1 rok. W celu osłony pozycji inwestor stosuje strategię zabezpieczającą *delta hedging* polegającą na stworzeniu w chwili $t=0$ portfela, który replikuje wypłatę z opcji w chwili wykonania.

Portfel replikujący składa się z:

- akcji spółki A w ilości Δ_0 (zakładamy idealną podzielność aktywów)
- instrumentu wolnego od ryzyka o wartości w chwili $t=0$ równej B_0 .

Instrument wolny od ryzyka zarabia w skali roku stopę 6%. Zakładamy, że akcja spółki A nie wypłaca dywidendy.

Wartość B_0 instrumentu wolnego od ryzyka wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) – 83.02 PLN (krótka pozycja: inwestor pożyczka instrument)
- B) – 64.15 PLN (krótka pozycja: inwestor pożyczka instrument)
- C) 64.15 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)
- D) 80.00 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)
- E) 83.02 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)

Wskazówka:

Mówimy, że portfel replikuje wypłatę z opcji, jeśli jego wartość jest równa wypłacie z opcji w dowolnym momencie i dla dowolnego scenariusza rozwoju rynku finansowego. Przyjmujemy założenia rynku doskonałego i zupełnego.

2. Na rynku dostępne są europejskie opcje kupna i sprzedaży wystawione na ten sam instrument bazowy o cenach wykonania X_1, X_2, X_3 (gdzie $X_1 < X_2 < X_3$) z okresem do wykonania równym T . Poniższa tabela zawiera obecne ($t = 0$) koszty zajęcia pozycji w opcjach:

| Koszt opcji | Cena wykonania | | |
|-----------------|----------------|-------|-------|
| | X_1 | X_2 | X_3 |
| Opcja kupna | c_1 | c_2 | c_3 |
| Opcja sprzedaży | p_1 | p_2 | p_3 |

Inwestor zajmuje pozycje w opcjach w chwili $t=0$. Funkcja wypłaty inwestora (uwzględniająca początkowe koszty zajęcia pozycji) w zależności od ceny instrumentu bazowego w momencie wykonania opcji wyraża się wzorem:

$$F(S_T) = \begin{cases} -(X_1 - S_T) + (p_1 - 2c_2 + 4c_3) e^{0.06 T} & \text{gdy } S_T < X_1 \\ (p_1 - 2c_2 + 4c_3) e^{0.06 T} & \text{gdy } X_1 \leq S_T < X_2 \\ 2(S_T - X_2) + (p_1 - 2c_2 + 4c_3) e^{0.06 T} & \text{gdy } X_2 \leq S_T < X_3 \\ -2S_T - 2X_2 + 4X_3 + (p_1 - 2c_2 + 4c_3) e^{0.06 T} & \text{gdy } S_T \geq X_3 \end{cases}$$

Gdzie S_T jest ceną instrumentu bazowego w momencie wykonania opcji. Wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 6% (zakładamy kapitalizację ciągłą).

Podaj strategie generującą funkcję wypłaty F :

- A) Dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1 , cztery krótkie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_2 , jedna krótka pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3 .
- B) Długa pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_1 , dwie krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2 , cztery długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_3 .
- C) Krótka pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_1 , dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2 , cztery krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_3 .
- D) Dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1 , dwie krótkie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_2 , dwie długie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3 .
- E) Cztery długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1 , dwie krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2 , jedna długa pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3 .

3. 1 stycznia 2009 r. Skarb Państwa emituje dwie obligacje: A i B, obie o tym samym nominale. Obligacje A i B wygasają w roku 2013 i płacą kupon 8%. Ponadto 1 stycznia 2011 (nie jest to moment płatności kuponu) jej posiadacz ma możliwość konwersji, na zasadach jeden za jeden, obligacji B na obligację z 9% kuponem i o tym samym nominale, wygasającą w roku 2017. Niech $P_A(0)$ i $P_B(0)$ oznaczają ceny obligacji A i B w momencie emisji. Wtedy:

- A) $P_A(0) > P_B(0)$
- B) $P_A(0) \geq P_B(0)$
- C) $P_A(0) < P_B(0)$
- D) $P_A(0) \leq P_B(0)$
- E) Podane informacje nie pozwalają na udzielenie odpowiedzi.

4. W jednookresowym modelu wyceny obligacji, dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio. Ich ceny w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $P(0,1) = 0.9$, $P(0,2) = 0.81$, $P(0,3) = 0.729$, $P(0,4) = 0.684$. Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

| | ω_1 | ω_2 | ω_3 |
|----------|------------|------------|------------|
| $P(1,2)$ | 0.880 | 0.900 | 0.920 |
| $P(1,3)$ | 0.770 | 0.805 | 0.860 |
| $P(1,4)$ | 0.700 | 0.750 | x |

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość x , przy której model ten jest wolny od arbitrażu wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) 0.76
- B) 0.80
- C) 0.84
- D) 0.88
- E) 0.92

5. Renta wieczysta płaci na koniec roku $n = 1, 2, \dots$ następujące kwoty

- $\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ w latach nieparzystych,
- $\frac{2}{n+1}$ w latach parzystych.

Roczna stopa dyskontowa wynosi $i = 4\%$. Wartość obecna tej renty wynosi (podaj najbliższą wartość).

- A) 6.0
- B) 6.1
- C) 6.2
- D) 6.3
- E) 6.4

6. Fundusz inwestycyjny założono w chwili $t = 0$ z wpłatą początkową równą 1. Stan funduszu w chwili t wynosi $A(t)$. Na rachunek dokonywane są w sposób ciągły wpłaty z roczną intensywnością $a(t) = \frac{2}{1 + \frac{1}{A(t)}}$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku

wynosi $\delta_t = \frac{1}{1 + A(t)}$. Ile wynosi stan funduszu w chwili $t = 1$?

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A) 2.8
- B) 2.9
- C) 3.0
- D) 3.1
- E) 3.2

7. Trzy osoby biorą z banku kredyty w wysokości 100 000 każdy, spłacane za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku przez najbliższe 15 lat. Każda z osób ma inny plan spłaty kredytu. Osoba pierwsza spłaca kredyt za pomocą rat postaci: $P, P-500, P-1000, \dots, P-7000$ (każda rata jest o 500 mniejsza od poprzedniej). Osoba druga spłaca kredyt za pomocą rat postaci: $Q, 2*Q, 3*Q, \dots, 15*Q$. Osoba trzecia spłaca kredyt za pomocą rat postaci: $R, 1,1*R, 1,1^2*R, \dots, 1,1^{14}*R$. Roczna efektywna stopa procentowa wynosi $i = 7\%$. Ile wynoszą sumaryczne odsetki zapłacone przez wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów (podaj najbliższą wartość)?

- A) 235 730
- B) 235 760
- C) 235 790
- D) 235 820
- E) 235 850

8. Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje, 10 letnią i 12 letnią. Wartość wykupu każdej obligacji wynosi 10 000. Każda obligacja wypłaca kupon o wartości 800 co dwa lata, począwszy od końca drugiego roku. Inwestor sfinansował 80% wartości zakupu obligacji za pomocą kredytu, natomiast pozostałą część opłacił z własnych środków. Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu.

Po trzech latach inwestor sprzedaje obie obligacje, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Wiedząc, że:

- cena zakupu obligacji została ustalona przy stopie procentowej - 6%,
- cena sprzedaży obligacji została ustalona przy stopie procentowej – 5%,
- stopa zwrotu funduszu, w którym reinwestowane są środki otrzymane z wypłaconych kuponów obligacji wynosi – 7%,
- oprocentowanie kredytu wynosi – 8%,

oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych. Podaj najbliższą wartość:

- A) 7.8%
- B) 8.1%
- C) 8.4%
- D) 8.7%
- E) 9.0%

9. Kredyt o wartości A będzie spłacany w formie renty odroczonej a płaconej 1 na koniec kolejnych lat. Wiadomo ponadto, że:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(a) = 11$$

$$\lim_{i \rightarrow 0} d(a) = 20.5$$

gdzie $d(a)$ oznacza *duration* renty a , natomiast i oznacza stopę procentową.

Kredyt o wartości B będzie spłacany w formie renty 10-letniej b , płatnej na koniec kolejnych lat, przy czym pierwsza rata wynosi 15, a każda następna jest o 1 mniejsza. Pierwsze płatności rent a i b odbywają się w tym samym momencie.

Oblicz ile wynosi suma $A + B$, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 8%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 39
- B) 41
- C) 43
- D) 45
- E) 47

10. Kredytobiorca spłaca pożyczkę za pomocą 10 rosnących rat płatnych na końcu każdego roku w wysokości 1, 2, 3, ... 10, począwszy od końca pierwszego roku.

Wyznacz sumaryczną wielkość kapitału pożyczki spłaconego w ratach 5, 6 i 7.

Wskaż odpowiedni wzór.

A) $[v^4 \cdot a_{\overline{4}|} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

B) $[v^4 \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|} \cdot (11 + i) - 3] / i$

C) $[v^3 \cdot a_{\overline{3}|} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

D) $[v^3 \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|} \cdot (11 + i) - 3] / i$

E) $[v^3 \cdot a_{\overline{4}|} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja ♦ |
|------------|-----------|-------------|
| 1 | B | |
| 2 | C | |
| 3 | D | |
| 4 | C | |
| 5 | A | |
| 6 | B | |
| 7 | B | |
| 8 | D | |
| 9 | A | |
| 10 | C | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.