Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:
....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 15 grudnia 2008 r.

1. Rozważamy grupę 100 noworodków wybranych z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$. Obliczyć wariancję czasu oczekiwania do pierwszej śmierci w grupie. Zakładamy, że ich życia są niezależne.
Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 0,90

(B) 0,92

(C) 0,94

(D) 0,96

(E) 0,98

2. Rozważamy zmianę śmiertelności w wyjściowej populacji zadaną wzorem:

$$\mu_{x+t}^{(M)} = \mu_{x+t} + M,$$

dla wszystkich $x, t \geq 0$. Zakładamy, że nieznany współczynnik przesunięcia M ma rozkład jednostajny na odcinku $[0{,}01; 0{,}02]$. Wiadomo, że dla wyjściowej populacji

$A_{x:\overset{1}{\overline{35}|}} = 0{,}195276$

Obliczyć wartość oczekiwaną składki $A_{x:\overset{1}{\overline{35}|}}$ względem rozkładu zmiennej M.
Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) $0{,}12$

(B) $0{,}13$

(C) $0{,}14$

(D) $0{,}15$

(E) $0{,}16$.

3. Za składkę jednorazową netto (x) kupuje rentę życiową ciągłą, która przez najbliższe n lat będzie mu wypłacać z intensywnością a na rok, a po dożyciu wieku (x+n) z intensywnością b na rok, aż do śmierci. Niech Y oznacza wartość obecną tych świadczeń emerytalnych na moment wystawienia polisy.

Obliczyć $Var(Y)$, jeśli dane są:

$\delta = 0{,}04$, $n = 10$, ${}_n p_x = 0{,}332871$,

$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 6{,}09967$, ${}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 5{,}25444$,

$\bar{a}_{x+n} = 3{,}25975$, ${}^2\bar{a}_{x+n} = 2{,}9242$.

Wybrać odpowiedź, w której współczynniki po prawej stronie są najbliższe prawdziwym.

(A)
$Var(Y) = 5{,}05565a^2 + 3{,}11643ab + 1{,}98029b^2$

(B)
$Var(Y) = 5{,}05565a^2 + 3{,}21643ab + 1{,}98029b^2$

(C)
$Var(Y) = 5{,}05565a^2 + 3{,}31643ab + 1{,}98029b^2$

(D)
$Var(Y) = 5{,}05565a^2 + 3{,}41643ab + 1{,}98029b^2$

(E)
$Var(Y) = 5{,}05565a^2 + 3{,}51643ab + 1{,}98029b^2$

4. Niech $P((IA)_x)$ oznacza regularną składkę netto, którą będzie płacić ubezpieczony (x) na początku każdego roku aż do śmierci za ubezpieczenie rosnące, które wypłaci uposażonym $(k+1)$, jeżeli umrze on w $(k+1)$. roku ważności polisy. Wówczas zachodzi wzór:

(A)

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{P((IA)_x) - vP_x}{v - P_x}$$

(B)

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{vP((IA)_x) - P_x}{v - P_x}$$

(C)

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{P((IA)_x) - P_x}{v - P_x}$$

(D)

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{P((IA)_x) - P_x}{v(1 - P_x)}$$

(E)

$$P((IA)_{x+1}) = \frac{P((IA)_x) - vP_x}{v(1 - P_x)}$$

5. Rozważamy kontrakt ubezpieczeniowy ciągły ogólnego typu dla osoby w wieku (x).

Wiadomo, że dla każdego $t \geq 0$ mamy zależność:

$$\pi(t) = c(t)\mu_{x+t} + s\,,$$

gdzie s jest stałą dodatnią. Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.$ Wówczas rezerwa składek netto $V(t)$ po t latach wynosi

(A)

$$V(t) = \frac{s\bar{a}_{x:\overline{t}|} + st}{{}_tp_x}$$

(B)

$$V(t) = \frac{s\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tp_x}$$

(C)

$$V(t) = \frac{s\bar{a}_{x:\overline{t}|} + t\mu_{x+t}}{{}_tp_x}$$

(D)

$$V(t) = \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|} + st}{{}_tp_x}$$

(E)

$$V(t) = \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|} + t\mu_{x+t}}{{}_tp_x}$$

6. Ubezpieczenie emerytalne dla (x), wziętego z populacji o wykładniczym rozkładzie trwania życia:

$$\mu_{x+t} = const = 0{,}01,$$

polega na tym, że przez najbliższe m lat będzie płacił coroczną regularną składkę w odpowiednio dobranej wysokości netto P a po dożyciu wieku x+m zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości 1 na początku roku. Obliczyć

$$\pi^{s}_{m+7}\ .$$

Techniczna stopa oprocentowania użyta do obliczenia składki i rezerw wynosi $i = 4\%$.

(zakładamy, że obie liczby x oraz m są całkowite dodatnie).

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) $-0{,}70$

(B) $-0{,}75$

(C) $-0{,}80$

(D) $-0{,}85$

(E) $-0{,}90$

7. Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 100$, natomiast żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_k = 110$. Obliczyć średni czas przebywania we wdowieństwie owdowiałej osoby. Zakładamy, że $T(30)$ oraz $T(25)$ są niezależne oraz, że owdowiała osoba nie wstępuje w związek małżeński.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) 22,7

(B) 23,7

(C) 24,7

(D) 25,7

(E) 26,7

8. Rozpatrujemy rentę wdowią dla niej (x) i dla niego (y):

a) w przypadku, gdy ona umrze jako pierwsza on zacznie otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 2 na rok (począwszy od jej śmierci);

b) natomiast, gdy on umrze jako pierwszy ona zacznie otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 1 na rok (począwszy od jego śmierci).

Niech Y oznacza wartość obecną świadczeń z tej polisy na moment jej wystawienia. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że ona umrze jako pierwsza pod warunkiem, że $Y \leq 10$.

Wiadomo, że:

$$\mu_{x+t}^{(k)} = const = 0{,}02\ ,$$

$$\mu_{y+t}^{(m)} = const = 0{,}04\ ,$$

$$\delta = 0{,}02.$$

Zakładamy, że $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne.

Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A)

$\Pr(T(x) < T(y) | Y \leq 10) = 0{,}30$

(B)

$\Pr(T(x) < T(y) | Y \leq 10) = 0{,}35$

(C)

$\Pr(T(x) < T(y) | Y \leq 10) = 0{,}40$

(D)

$\Pr(T(x) < T(y) | Y \leq 10) = 0{,}45$

(E)

$\Pr(T(x) < T(y) | Y \leq 10) = 0{,}50$

9. Rozważamy polisę ciągłą ogólnego typu wystawioną osobie w wieku $x = \omega - n$ wybranej z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, gdzie $\omega > n > 0$. Gdy ubezpieczony umrze w wieku $x + t$ będzie wypłacone świadczenie $c(t)$ w wysokości $c(t) = n - t$.
Wiadomo ponadto, że rezerwy składek netto po czasie $t \in [0, n)$ wynoszą:
$V(t) = nt - t^2$.
Obliczyć
$\sup_{t\in[0,n)} \pi(t) - \inf_{t\in[0,n)} \pi(t)$.
Zakładamy, że techniczna intensywność oprocentowania δ spełnia warunek
$0 < n\delta < 3$.
Wybrać odpowiedź najbliższą.

(A) n

(B) $1{,}5n$

(C) $2n$

(D) $2{,}5n$

(E) $3n$.

10. Osoba w wieku (30) zaczyna płacić składki regularne w wysokości netto P_{30} na początku każdego roku, aż do śmierci. Na koniec roku śmierci uposażeni otrzymają sumę ubezpieczenia równą 1. Załóżmy, że po $k > 0$ latach ubezpieczony żyje i niech ${}_kL$ oznacza stratę ubezpieczyciela na ten moment. Obliczyć
$\Pr({}_kL < {}_kV)$.
Dane są:
$A_{30+k} = 0{,}435$, $i = 4\%$.

(A)

$\Pr({}_kL < {}_kV) = {}_{21}p_{x+k}$

(B)
$\Pr({}_kL < {}_kV) = {}_{21}p_{x+k} \cdot p_{x+k}$

(C)
$\Pr({}_kL < {}_kV) = {}_{20}p_{x+k}$

(D)

$\Pr({}_kL < {}_kV) = {}_{20+k}p_x - {}_kq_x$

(E) żaden z powyższych wzorów nie jest prawdziwy.

XLVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	A	
4	C	
5	B	
6	C	
7	E	
8	A	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.