

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy
XLIX Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Zakład ubezpieczeń stosuje strategię zabezpieczającą polegającą na:

- (i) dopasowaniu obecnej wartości zobowiązań do wartości godziwej aktywów pokrywających te zobowiązania, oraz
- (ii) utrzymaniu takiej samej wrażliwości aktywów i zobowiązań względem wahań stopy procentowej.

Ubezpieczyciel chce zastosować strategię zabezpieczającą w odniesieniu do trzech rent pewnych płaćcych 1 000 PLN na koniec każdego roku i wygasających odpowiednio po 10, 12 i 15 latach. W celu osłonięcia tego zobowiązania zakupione zostały dwie obligacje zero-kuponowe o nominałach: X_1 oraz X_2 i okresach do wygaśnięcia t_1 oraz t_2 , odpowiednio.

Podaj wartości parametrów pozwalających zrealizować założenia strategii zabezpieczającej przy stałej stopie procentowej 10%.

A) $t_1 = 3$; $t_2 = 14$; $X_1 = 18\,200$ PLN; $X_2 = 26\,165$ PLN

B) $t_1 = 4$; $t_2 = 13$; $X_1 = 24\,179$ PLN; $X_2 = 13\,980$ PLN

C) $t_1 = 7$; $t_2 = 10$; $X_1 = 28\,560$ PLN; $X_2 = 15\,325$ PLN

D) $t_1 = 5$; $t_2 = 12$; $X_1 = 27\,546$ PLN; $X_2 = 10\,860$ PLN

E) $t_1 = 4$; $t_2 = 8$; $X_1 = 18\,669$ PLN; $X_2 = 16\,748$ PLN

2. Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał następujące kwotowania:

- (i) obecna cena akcji X: 100 PLN,
- (ii) nominalna stopa wolna od ryzyka: 7% w skali roku,
- (iii) europejska opcja kupna na 1 akcję X z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 11.4 PLN,
- (iv) europejska opcja sprzedaży na 1 akcję X z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 5.6 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję X istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na chwilę obecną wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

- A) 2.47 PLN
- B) 2.56 PLN
- C) 5.41 PLN
- D) 5.60 PLN
- E) 11.40 PLN

3. Proces ceny akcji $S(t)$ przedstawia tabela

$t \setminus \omega$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$t=0$	7	7	7	7
$t=1$	11	11	4	4
$t=2$	13	10	6	2

Tabela podaje wartości $S(t, \omega_k)$ procesu $S(t)$ dla poszczególnych zdarzeń elementarnych ω_k , $k=1, 2, 3, 4$. Zdarzenie $\omega_k \in \Omega$ należy w modelu interpretować jako ścieżkę wzrostów i spadków ceny akcji w trzech kolejnych okresach $t=0, 1, 2$, zaś Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Rozważmy stwierdzenia:

- (i) Element F_t filtracji \mathbf{F} generowanej przez proces $S(t)$ ma postać

$$F_t = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}.$$

- (ii) Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\mathbf{E}(S(t=2) | F_t)$ przyjmuje wartość 5.5 dla ω_3, ω_4 .
- (iii) Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\mathbf{E}(S(t=2) | F_t)$ przyjmuje wartość 11.5 dla ω_1, ω_2 .
- (iv) Jeżeli stopa wolna od ryzyka przekracza $2/11$, to miara martyngałowa nie istnieje.

Liczba stwierdzeń prawdziwych wśród powyższych to:

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 3
 E) 4

4. Funkcja intensywności oprocentowania w chwili t dla kwoty zainwestowanej w chwili s ,

$0 \leq s \leq t$ wynosi $\delta(s, t) = \frac{1}{1 + s + t}$. Funkcja $a(s, t)$ jest wartością w chwili t kwoty 1

zainwestowanej w chwili s . Inwestor A rozpoczął inwestycję w chwili $s=2$ i zakończył w chwili $t=5$. Inwestor B również rozpoczął inwestycję w chwili $s=2$, przerwał ją po czasie 1 (na bardzo krótko), a następnie posiadaną kwotę ponownie zainwestował do chwili $t=5$. Wyznacz różnicę między zyskiem inwestorów A i B, tzn. $a(2,5) - [a(2,3) \cdot a(3,5)]$. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) $2/35$
- B) $3/35$
- C) $4/35$
- D) $5/35$
- E) $6/35$

5. Wiadomo, że w chwili 0 cena obligacji zerokuponowej zapadającej w chwili $T > 0$ wynosi:

$$P(0, T) = \exp(-0.1T), \quad T > 0.$$

Wiadomo ponadto, że krzywa stóp spot ma postać $R(0, s) = 0.1$, dla $0 \leq s < 1$. Następnie, począwszy od chwili $s = 1$, z prawdopodobieństwem $q > 0$ opisuje ją funkcja

$$R(1, s) = 0.1 + u(s), \quad s \geq 1,$$

zaś z prawdopodobieństwem $1 - q$ opisuje ją funkcja

$$R(1, s) = 0.1 - d(s), \quad s \geq 1,$$

dla pewnych ściśle dodatnich krzywych dochodowości $u(s), d(s)$. Załóżmy, że $u(s)$ jest ustaloną funkcją, zaś $d(2)$ jest znane oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ile wynosi $\lim_{s \rightarrow \infty} d(s)$? Podaj najbliższą odpowiedź.

- A) $\exp(-2)$
- B) $\exp(-0.1)$
- C) 0
- D) 1
- E) $+\infty$

6. Rozpatrzmy amerykańską opcję kupna na akcję niepłacącą dywidendy, dla której termin wygaśnięcia upływa za 4 miesiące. Obecna cena akcji wynosi 40 a cena wykonania opcji 44. Wiadomo, że w ciągu każdego miesiąca kurs akcji rośnie bądź spada o 15%. Zakładamy ponadto, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Stopa wolna od ryzyka wynosi 5% w ujęciu rocznym. Przy podanych założeniach cena tej opcji wynosi, w przybliżeniu:

- A) 2.5
- B) 2.8
- C) 3.2
- D) 3.8
- E) 4.2

7. Kredytobiorca zaciągnął kredyt w wysokości 300 000 na okres 20 lat. Kredyt ma być spłacany następująco:

- przez pierwsze 10 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R_1 , przy oprocentowaniu 7%,
- przez drugie 10 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R_2 , przy oprocentowaniu 9%.

Bezpośrednio po zapłaceniu 15 raty kredytobiorca uzgodnił z bankiem, że dodatkowo pożyczycy 100 000 oraz, że spłaci całość zadłużenia w ciągu 10 lat ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R_3 , przy oprocentowaniu 8%.

Wiedząc, że suma odsetek, jakie zapłacił kredytobiorca w 7 i 14 racie spłaty kredytu wynosi 31 621.60, obliczyć ile wyniesie sumaryczna kwota odsetek, jakie zapłaci kredytobiorca w czasie spłaty kredytu w ostatnich 10 latach (po zmianie warunków kredytu). Podaj najbliższą wartość.

- A) 108 400
- B) 108 800
- C) 109 200
- D) 109 600
- E) 110 000

-
8. Kredyt w wysokości 100 000, zaciągnięty na okres 15 lat, jest spłacany ratami o równej wysokości R , płatnymi na koniec roku. W momencie płacenia K – tej raty kredytobiorca decyduje się na wpłacenie dodatkowej kwoty w wysokości kwoty kapitału, który byłby spłacony w następnej racie, gdyby zachowany został dotychczasowy tryb spłaty kredytu. Kredytobiorca obliczył, że po tej operacji, płacąc w kolejnych latach raty tej samej wysokości jak dotychczas tzn. R , aż do momentu spłaty kredytu, zapłaci w sumie o 7 014.03 mniej odsetek niż w przypadku, gdyby nie dokonywał dodatkowej wpłaty. Znajdź wartość K , wiedząc, że oprocentowanie kredytu wynosi 10%.

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9

9. W portfelu inwestycyjnym znajdują się trzy rodzaje instrumentów finansowych:

- 15 – letnie zero kuponowe obligacje,
- 20 – letnie obligacje z kuponem o wartości 5% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku,
- bezterminowe obligacje (perpetuity) wypłacające na koniec każdego roku stałą kwotę.

Duration całego portfela wynosi 17, 5, natomiast duration portfela składającego się tylko z obligacji 15 - letnich i obligacji bezterminowych wynosi 20.

Wyznacz, udział procentowy obligacji 20 – letnich w portfelu, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 5% (podaj najbliższą wartość).

- A) 32%
- B) 34%
- C) 36%
- D) 38%
- E) 40%

10. Rozważane są dwa sposoby 15 – letniego inwestowania środków w fundusze inwestycyjne F_1 , F_2 i F_3 , których stopy zwrotu wynoszą odpowiednio $i_1 = 10\%$, $i_2 = 7\%$ i $i_3 = 8\%$.

Sposób 1 – środki wpłacane są do funduszu F_1 , następnie na końcu każdego roku uzyskane w tym roku odsetki reinwestowane są w funduszu F_2 , a z kolei odsetki uzyskane w funduszu F_2 są reinwestowane w analogiczny sposób w F_3 (odsetki uzyskane w funduszu F_3 reinwestowane są w tym samym funduszu).

Sposób 2 - środki wpłacane są do funduszu F_1 , następnie na końcu każdego parzystego roku uzyskane w tym roku odsetki reinwestowane są w funduszu F_2 (odsetki uzyskane w funduszu F_2 reinwestowane są w tym samym funduszu).

Niech j_1 oznacza efektywną roczną stopą zwrotu z inwestycji wykonywanej sposobem 1, a j_2 analogiczną stopę zwrotu z inwestycji wykonywanej sposobem 2. Oblicz różnicę $j_2 - j_1$ (podaj najbliższą wartość).

- A) - 1 %,
- B) - 0.5 %
- C) 0.5 %
- D) 1.0 %
- E) 1.5 %

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	E	
2	A	
3	D	
4	A	
5	C	
6	D	
7	B	
8	C	
9	C	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.